

- L'usage de la calculatrice est autorisé.
- Un résultat non démontré peut être utilisé pour la suite du problème.
- Tout résultat fourni sans justification ainsi que toute application numérique sans unité seront considérés comme sans valeur.
- On accordera la plus grande importance à la concision et la clarté de la rédaction. En particulier, encadrer les résultats.
- Le sujet comporte 3 parties complètement indépendantes.

Données :

- Constante de Boltzmann : $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} J \cdot K^{-1}$
- Charge élémentaire $e = 1.6 \cdot 10^{-19} C$
- Masse de l'électron : $m_e = 9.1 \cdot 10^{-30} kg$
- Permittivité diélectrique du vide : $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} F \cdot m^{-1}$
- Constante d'Avogadro : $N_A = 6.02 \cdot 10^{23} mol^{-1}$
- Dans le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) , pour tout champ scalaire $V(r, \theta, z)$ et tout champ vectoriel $\vec{F} = F_r \vec{e}_r + F_\theta \vec{e}_\theta + F_z \vec{e}_z$, on donne :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{grad}}(V) &= \frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{e}_z \\ \text{div}(\vec{F}) &= \frac{1}{r} \frac{\partial (r \cdot F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \\ \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{F}) &= \begin{vmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r \cdot F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \end{vmatrix}\end{aligned}$$

- Pour une fonction f à symétrie sphérique (ne dépendant que de la variable r), le laplacien s'écrit :

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{d^2(r \cdot f(r))}{dr^2}$$

1. Ecrantage dans un plasma (Adapté de Centrale-Supélec PSI)

Les plasmas sont des milieux globalement neutres, partiellement ou totalement ionisés. On s'intéresse à un plasma d'argon contenant en moyenne et par unité de volume n_e électrons libres de masse m_e et de charge $-e$, $n_i = n_e$ ions Ar^+ de masse m_i et n_0 atomes d'argon Ar de masse m_0 . On considère que le plasma est à l'équilibre thermodynamique local, ce qui permet de définir la température.

Considérons un ion argon Ar^+ particulier, placé en O , et pris comme origine. Du fait de l'attraction Coulombienne, au voisinage de cet ion, on observe un surplus de charge négative, responsable d'un écart local à la neutralité globale du plasma. Soit $V(r)$ le potentiel électrostatique qui règne en un point M situé à la distance r de l'ion situé en O (l'origine des potentiels est prise à l'infini). Les densités volumiques d'ions et d'électrons en M s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned}n_+ &= n_e \exp\left(-\frac{eV(r)}{k_B T}\right) \\ n_- &= n_e \exp\left(\frac{eV(r)}{k_B T}\right)\end{aligned}$$

Où k_B est la constante de Boltzmann

- Quelle(s) remarque(s) vous suggère(nt) les expressions de n_+ et n_- ?
- Donner l'expression de la densité volumique totale de charges $\rho_C(r)$ au point M , pour $r \neq 0$.
- Quelle est l'équation locale satisfaite en M par le potentiel $V(r)$? La démontrer puis expliciter l'équation différentielle dont V est solution.
- On se place dorénavant dans l'hypothèse $eV(r) \ll k_B T$. Résoudre l'équation obtenue en c (aide on introduira la fonction $r \rightarrow u(r) = r \cdot V(r)$). On introduira par ailleurs deux constantes d'intégration A_1 et A_2 et faire apparaître une distance caractéristique λ_D (appelée longueur de Debye) que l'on explicitera en fonction de ϵ_0 , k_B , T , n_e et e . Vérifier la dimension de λ_D

On admet que $V(\infty) = 0$ et qu'au voisinage immédiat de l'ion Ar^+ , l'influence de sa charge, supposée ponctuelle, l'emporte sur celle des charges électroniques distribuées en volume. Pour r petit, tout se passe donc comme si l'ion était considéré seul.

- Quel est le potentiel V_p créé par une charge ponctuelle q seule ?
- Déterminer alors les constantes A_1 et A_2 . En déduire que le potentiel s'écrit $V(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right)$. Commenter cette expression.
- En déduire la densité volumique totale de charge $\rho_C(r)$ en $r \neq 0$. Quel est le volume d'une coquille sphérique dont le rayon est compris entre r et $r + dr$? En déduire la charge totale $Q(r)$ (y compris la charge ponctuelle centrale) contenue dans une sphère de centre O et de rayon r en fonction de e , λ_D et r . Discuter les cas $r \rightarrow 0$ et $r \rightarrow +\infty$. Conclure.
- Application numérique :* on donne pour ce plasma d'Argon $n_e = 3.0 \cdot 10^{21} m^{-3}$
Calculer la valeur numérique de λ_D aux températures $T_1 = 1000 K$ et $T_2 = 10000 K$.

2. Identification de particules dans une chambre à projection temporelle (Adapté de Mines-Ponts PSI)

Dans l'expérience DELPHI du CERN on réalise des collisions à grande vitesse entre des électrons et des positrons (antiélectrons). Ces dernières produisent des particules chargées appelées particules filles, que l'on cherche à identifier. On tente pour cela de reconstituer leurs trajectoires dans une chambre dite à projection temporelle.

Cette chambre comporte trois parties : la chambre de dérive, la chambre proportionnelle et la chambre à fils. L'ensemble du détecteur comporte un axe z de symétrie de révolution. A l'intérieur de la chambre de dérive les collisions électrons-positrons ont lieu à proximité de l'axe z. Cette chambre est remplie d'argon sous faible pression.

Le mouvement des particules filles dans l'enceinte gazeuse produit des électrons d'ionisation.

Le mouvement d'un électron d'ionisation dans la chambre de dérive et les signaux électriques qu'il produit dans la chambre à fils permettent de déterminer les coordonnées du point où l'ionisation a eu lieu. On peut ainsi obtenir toutes les informations cinématiques sur les particules filles et déterminer leurs natures. Dans toute cette étude on utilisera la mécanique classique non relativiste et le poids des particules sera négligé.

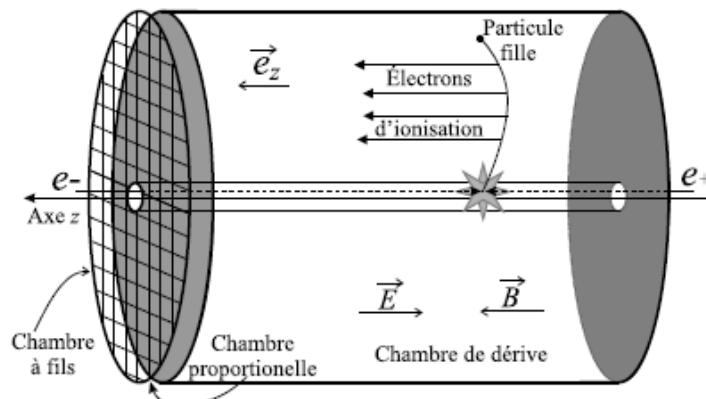


Figure 5 : Chambre à projection temporelle

Mouvement d'un électron d'ionisation dans la chambre de dérive

On s'intéresse au mouvement d'un électron d'ionisation, noté e_i , de masse m_e et de charge $-e$, à l'intérieur de la chambre de dérive. Dans cette enceinte, cylindrique de longueur $L = 2,1\text{ m}$, règne un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_z$ et un champ électrique $\vec{E} = -E\vec{e}_z$ permanents et uniformes (voir Figure 5). Le champ électrique est obtenu en imposant une différence de potentiel $U = 63\text{ kV}$ entre les deux extrémités de la chambre. En plus de la force électromagnétique, le gaz contenu dans la chambre de dérive impose à l'électron une force de frottement fluide $\vec{F} = -\mu\vec{v}$ où \vec{v} représente sa vitesse et $\mu = 9,6 \cdot 10^{-20}\text{ kg.s}^{-1}$. On appelle la vitesse $\vec{v}_e = v_{ex}\vec{e}_x + v_{ey}\vec{e}_y + v_{ez}\vec{e}_z$ de e_i au moment de son émission par ionisation d'un atome du gaz. On se place en coordonnées cartésiennes (x, y, z) dans la base $(\vec{e}_x; \vec{e}_y; \vec{e}_z)$ de telle manière que $\vec{v}_e \cdot \vec{e}_y = 0$. L'origine O du référentiel est le point d'émission de e_i à l'instant $t = 0$.

- En prenant comme paramètres e, B, μ, U et L , établir les trois équations différentielles régissant l'évolution des composantes v_x, v_y et v_z de la vitesse de e_i dans la chambre de dérive. Exprimer v_z en fonction du temps t et déterminer $v_{lim} = \lim_{t \rightarrow +\infty} v_z(t)$. On posera $\tau = \frac{m_e}{\mu}$.
- Calculer la valeur numérique de v_{lim} . En négligeant $\vec{v}_e \cdot \vec{e}_z$ devant v_{lim} , calculer le temps T qu'il faut attendre pour que :

$$\frac{|v_z(t) - v_{lim}|}{|v_{lim}|} < 1\%$$

- Ecrire l'équation différentielle vérifiée par la fonction complexe $\underline{v}(t) = v_x(t) + iv_y(t)$. Déduire de la résolution de cette équation les expressions de $v_x(t)$ et $v_y(t)$. On posera la pulsation $\omega_e = \frac{eB}{m_e}$.
- Après une phase transitoire très brève, quel type de mouvement adopte e_i ? Montrer alors que la durée de ce mouvement permet d'obtenir la coordonnée z_0 du point de la trajectoire de la particule fille où s'est produite l'ionisation à l'origine de e_i .

Etude des chambres proportionnelles à fils

A la sortie de la chambre de dérive, e_i doit produire un signal sur un détecteur qui permet d'obtenir les deux autres coordonnées pour la reconstruction de la trajectoire de la particule fille. La charge d'un électron étant trop faible pour obtenir un signal détectable, on utilise une chambre dite proportionnelle pour produire un phénomène d'avalanche. Cette chambre est constituée de deux grilles perpendiculaires à l'axe z distantes de $L' = 1\text{ cm}$ et entre lesquelles on applique une différence de potentiel $U' = 1500\text{ V}$. La chambre proportionnelle est remplie du même gaz que celui contenu dans la chambre de dérive.

- Sachant que l'énergie molaire de première ionisation de l'argon vaut $E_i = 1520\text{ kJ/mol}$, et en admettant que seulement 50% de l'énergie fournie par la différence de potentiel U' permet d'ioniser les atomes d'argon, quel est le nombre N d'ionisations produites par un électron de dérive ?

Les électrons « produits » par ces ionisations, appelés électrons secondaires, provoquent eux aussi de nouvelles ionisations : il se produit une avalanche qui permet d'obtenir environ 10^5 électrons pour un électron de dérive. La détection du signal est effectuée dans la chambre à fils. L'avalanche d'électrons arrive sur un fil métallique qui va influencer un autre fil métallique parallèle au précédent. Cette charge permet de générer un signal électrique. On considère que chaque fil est un cylindre conducteur de rayon a et de longueur $h \gg a$.

- Etablir l'expression du champ électrique \vec{E}_f créé à l'extérieur d'un fil métallique cylindrique infiniment long, portant une charge linéique uniforme $\lambda = q/h$. En déduire le potentiel électrique associé à ce champ sans chercher pour l'instant à déterminer la constante d'intégration.

On considère à présent deux fils identiques au précédent, d'axes parallèles et séparés d'une distance d , mais portant des charges linéiques opposées $\lambda_+ = +q/h$ et $\lambda_- = -q/h$.

- g. En le prenant nul lorsque $r_1 = r_2$, montrer que le potentiel électrique au point M s'écrit : $V(M) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 h} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$. Montrer que la capacité formée par une longueur h de ces deux fils est donnée par la relation :

$$C = \frac{\pi\epsilon_0 h}{\ln\left(\frac{d-a}{a}\right)}$$

Calculer la valeur de cette capacité pour $h = 1.0 \text{ mm}$, $d = 3.0 \mu\text{m}$ et $a = 1.0 \mu\text{m}$.

On place les deux fils de la question précédente en influence dans le circuit de la Figure 7 comprenant une résistance R et un générateur de force électromotrice constante $W = 1.0 \text{ V}$. En l'absence d'avalanche, en régime permanent, on appelle q_o la charge totale prise par l'armature positive. Lorsqu'une avalanche se produit, cette charge devient $q_1 = q_o - 10^5 e$ et, par influence, l'autre armature acquiert, après un temps caractéristique $\tau' = 1.0 \times 10^{-12} \text{ s}$, une charge opposée.

- h. Calculer les valeurs numériques de q_o et q_1 puis établir l'équation différentielle vérifiée par la tension U_R . Résoudre cette équation en choisissant $t = 0$ pour l'arrivée de l'avalanche sur l'armature positive.
i. Comment doit-on choisir R pour que le temps τ' soit négligeable devant les temps caractéristiques des phénomènes étudiés ? Expliquer la nécessité de provoquer une avalanche à partir d'un électron de dérive. Comment un tel dispositif permet-il d'identifier les coordonnées x et y de la particule fille au moment de l'ionisation de l'argon dans la chambre de dérive ?

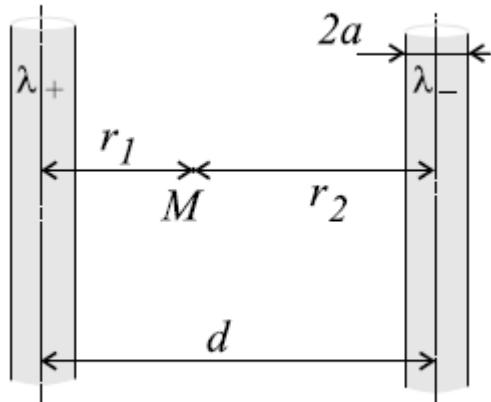


Figure 6

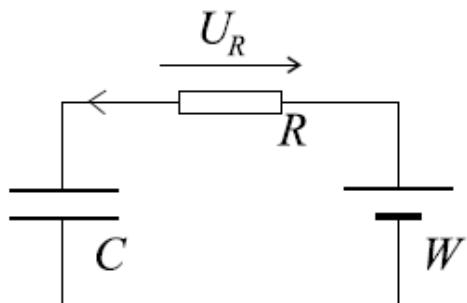


Figure 7

Les chambres proportionnelles à fils ont été inventées et mises au point à la fin des années 1960 par le physicien français GEORGES CHARPAK et lui valurent le prix NOBEL en 1992.

3. Extrait de CC-INP

A. Création d'un champ magnétique intense à l'aide d'un solénoïde

L'imagerie médicale a besoin de champs magnétiques intenses, permanents et uniformes. On se propose ici de dimensionner une bobine dans laquelle règne un champ magnétique de 2T.

Résistance électrique d'un conducteur ohmique :

On considère un conducteur ohmique (figure 3), de conductivité électrique γ , de section S , de longueur h , parcouru par un courant électrique continu uniformément réparti de densité $\vec{j}_e = j_e \vec{e}_z$.

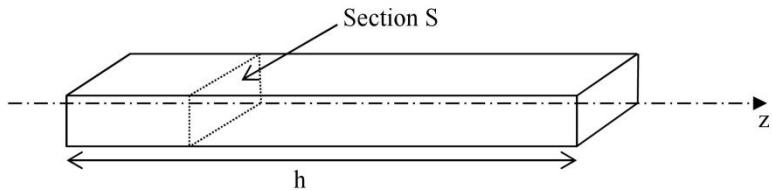


Figure 3 : conducteur ohmique

- Exprimer en fonction de γ et de \vec{J}_e , le champ électrique \vec{E} qui règne à l'intérieur de ce conducteur.
- Donner en fonction de γ , j_e et des caractéristiques géométriques de ce conducteur, les expressions du courant électrique I traversant ce conducteur et de la différence de potentiel U aux bornes de ce conducteur.
- En déduire, en fonction de γ et des caractéristiques géométriques de ce conducteur, la résistance électrique R_e de ce conducteur.

Caractéristiques de la bobine à température ambiante :

On suppose ici que la bobine est maintenue à température ambiante $T = 300K$.

La bobine (figure 4, ci-après) est assimilée à un solénoïde d'axe (Oz), de longueur L , de rayon R_{moy} avec $R_{moy} < L$. Les effets de bords sont négligés, le solénoïde est donc considéré comme infini. Il est constitué de spires jointives d'un fil de cuivre de diamètre d et de conductivité électrique γ_{Cu} . Chaque spire est parcourue par un courant I . Il comporte p couches de bobinage superposées.

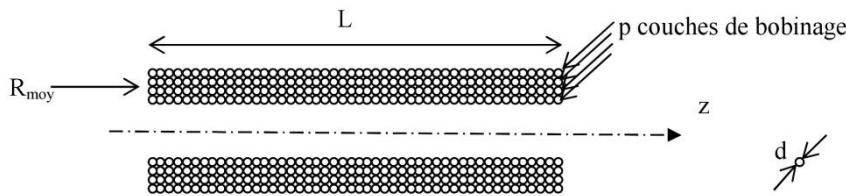


Figure 4 : bobine

- (i) Sur une seule couche de bobinage, combien y-a-t-il de spires jointives par unité de longueur de solénoïde ?
(ii) Combien de spires par unité de longueur comporte ce solénoïde ?
- (i) Etablir, en fonction de d , p , I et μ_0 , l'expression du champ magnétique créé à l'intérieur du solénoïde.
(ii) Application numérique : $B = 2.0 T$, $d = 3.0 mm$, $I = 35A$. Déterminer p .
- (i) En assimilant le rayon de chaque spire au rayon moyen R_{moy} , exprimer la longueur, L_{fil} , de fil nécessaire à la réalisation de cette bobine en fonction de R_{moy} , d , p et L .
(ii) Application numérique : $L = 1,8m$ et $R_{moy} = 50cm$. Evaluer L_{fil} .
- (i) Exprimer en fonction de γ_{Cu} , de L_{fil} et de d la résistance électrique $R_{élec}$ de la bobine.
(ii) Application numérique : évaluer la puissance P_J , dissipée par effet Joule dans la bobine. Commenter.

Caractéristiques de la bobine refroidie à 77K :

On suppose ici que la bobine est maintenue à la température de 77K.

Pour diminuer la puissance dissipée, on peut envisager de refroidir le conducteur en cuivre par l'intermédiaire d'un bain d'azote liquide à 77K. On peut alors imposer dans un conducteur de cuivre, de même diamètre $d=3mm$, un courant plus important $I' = 80A$. On réduit ainsi le nombre de spire de la bobine et donc sa résistance électrique et son rayon moyen.

- h. (i) Quel est alors le nombre de couches de bobinage, p' , à superposer pour obtenir un champ magnétique de $2 T$?
(ii) En assimilant le rayon de chaque spire au nouveau rayon moyen $R'_{moy} = 40\text{cm}$, évaluer la nouvelle puissance dissipée par effet Joule, P'_J , dans la bobine.

Compte-tenu du coût de la réfrigération à 77K, il faut tenir compte de l'efficacité de la machine thermique assurant le maintien de cette basse température.

- i. On considère une machine frigorifique cyclique et réversible qui assure, par l'intermédiaire d'un fluide calporteur, les transferts thermiques entre deux sources de températures constantes T_f et T_c .
(i) En effectuant un bilan énergétique et un bilan entropique sur un système bien défini, exprimer l'efficacité e_{rev} , de cette machine en fonction de T_f et T_c .
(ii) Application numérique : $T_f=77\text{K}$ et $T_c=300\text{K}$. Evaluer e_{rev} .
- j. Evaluer la puissance P' , minimale, nécessaire pour absorber la puissance P'_J , dissipée dans la bobine en cuivre refroidi. Commenter.

B. Puissance dissipée dans le supraconducteur lors des régimes transitoires

Si les supraconducteurs sont dépourvus de pertes en régime continu, il n'en est pas de même en régime variable. Pour les bobines alimentées en régime continu, ces pertes ont lieu lors des deux régimes transitoires qui correspondent en début d'utilisation de la bobine à l'installation du courant dans le conducteur, puis en fin d'utilisation de la bobine, lors de la redescente à zéro de ce courant.

On se propose ici déterminer l'ordre de grandeur de la puissance dissipée par unité de longueur du conducteur, lors de la première montée de courant, dans une situation dite de champ propre, c'est-à-dire lorsqu'une portion de conducteur est soumise aux variations temporelles du champ magnétique qu'il crée sur lui-même.

On assimile le supraconducteur (figure 5) à un fil rectiligne infini suivant l'axe Oz, de rayon R. On adopte les coordonnées cylindriques.



Figure 5 : supraconducteur

Compte-tenu des invariances du problème, la densité volumique de courant, notée \vec{j}_e , dans le supraconducteur ne dépend que de r et est portée par le vecteur \vec{e}_z . On a $\vec{j}_e = j_e(r)\vec{e}_z$. Pour un courant de transport I donné, la densité de courant n'est pas uniforme dans le supraconducteur, son amplitude vaut $\pm j_o$ ou 0, où j_o est une constante. Ce courant se distribue de façon à protéger le centre du supraconducteur de toute variation de champ magnétique.

- a. Déterminer en fonction de j_o et de R la valeur maximale I_c , dite valeur critique du courant de transport de ce conducteur.

Etude de la première montée de courant dans le supraconducteur :

On ne s'intéresse ici qu'à la première montée du courant $I(t)$ dans le supraconducteur.

On suppose que cette première montée s'effectue, pendant une durée T , suivant une consigne en rampe de sorte que : $I(t) = \frac{I_o}{T}t$, où I_o est la valeur finale du courant dans le supraconducteur.

Ce courant se distribue de façon à protéger le centre du supraconducteur de toute variation de champ magnétique, de sorte qu'il se répartit, à un instant t de cette première étape, à la périphérie du supraconducteur dans la zone : $r_1(t) < r < R$ (figure 6).

On a : $j_e(r, t) = 0$ pour $r < r_1(t)$ et $j_e(r, t) = j_o$ pour $r > r_1(t)$.

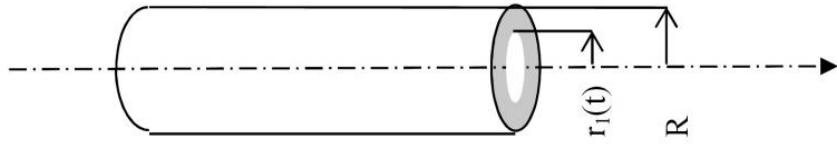


Figure 6 : répartition du courant dans le supraconducteur

- b. On définit par $u = I_o/I_c$ le taux d'utilisation du supraconducteur. Exprimer u en fonction de j_o , R et I_o .
- c. (i) Déterminer la relation qui existe entre $I(t)$, j_o , $r_1(t)$ et R .
 (ii) En déduire l'expression de $r_1(t)$ en fonction de R , u , T et t .
 (iii) Exprimer $r_1(T)$ en fonction de u et R .
- d. (i) A l'aide des propriétés de symétries et d'invariance, préciser de quelle(s) variable(s) de l'espace dépend le champ magnétique \vec{B} dans le supraconducteur et par quel(s) vecteur(s) de base il est porté.
 (ii) Par application du théorème d'Ampère, dans l'approximations des régimes quasi-stationnaires, sur un contour que l'on précisera, déterminer à l'instant t le champ magnétique $\vec{B}(r, t)$ dans la zone : $r \in [0, r_1(t)]$.
 (iii) De même, déterminer en fonction de μ_o , j_o et $r_1(t)$, le champ magnétique $\vec{B}(r, t)$ dans la zone : $r \in [r_1(t), R]$.
 (iv) Tracer l'allure de la fonction $\|\vec{B}(r, t)\|$ à un instant t , pour $r \in [0, R]$.
- e. Rappeler l'équation de Maxwell-Faraday. Donner le nom du phénomène physique régi par cette loi.

Pour la question m, on admettra que toute contribution du champ électrique, qui ne dépend que de l'espace ou que du temps, sera assimilée à la fonction nulle.

- f. Que vaut le champ électrique $\vec{E}(r, t) = E(r, t)\vec{e}_z$ pour $r < r_1(t)$?
- g. En remarquant que le champ électrique est continu en $r_1(t)$ et qu'il peut s'écrire sous la forme $\vec{E}(r, t) = E(r, t)\vec{e}_z$, montrer que $E(r, t) = \frac{\mu_o I_o}{2\pi r} \ln\left(\frac{r(t)}{r_1(t)}\right)$ pour $r \in [r_1(t), R]$.
- h. Quelle est l'unité de \vec{E} ? Proposer, en quelques lignes, un protocole permettant de visualiser expérimentalement le champ électrique $E(R, t)$ sur un écran d'oscilloscope ou d'ordinateur.
- i. Donner l'expression de la densité volumique locale et instantanée de puissance dissipée dans le supraconducteur, notée $p_v(r, t)$:
 - (i) dans la zone : $r \in [0, r_1(t)]$.
 - (ii) dans la zone : $r \in [r_1(t), R]$.
- j. Par intégration sur l'espace, en déduire, en fonction de μ_o , I_o , T , L_{supra} , u et t , l'expression de la puissance $P_{elec}(t)$ dissipée dans une longueur L_{supra} de supraconducteur à l'instant t lors de la première montée de courant.
- k. (i) Par intégration sur le temps, déterminer l'énergie Q dissipée lors de la première montée du courant dans un supraconducteur de longueur L_{supra} en fonction de μ_o , I_o , L_{supra} et u .
 (ii) Est-il utile d'augmenter la durée T d'établissement de ce courant pour réduire l'énergie dissipée dans le supraconducteur ?
- l. La machine thermique qui assure le refroidissement du supraconducteur à 4,2K a une efficacité de $1,5 \cdot 10^{-3}$. On donne $I_o = 445A$, $L_{supra} = 14000\text{ m}$ et $u = 0,7$. Evaluer l'énergie consommée Q_{amb} par le réfrigérateur devant absorber l'énergie Q dissipée lors de la première montée de courant. Commenter.