

Partie 1. Écrantage de un plasma

a. la q^{th} qV représente l'énergie potentielle de la particule de charge q ressentant le potentiel

On a donc $n_{\pm} = n_e \exp\left(-\frac{\bar{\epsilon}_{p\pm}}{k_B T}\right)$

donc $\bar{\epsilon}_{p\pm} \rightarrow n_{\pm} (\bar{\epsilon}_{p\pm})$ est une fct décroissante.

plus la particule a une énergie potentielle grande, moins il y a de particules à son voisinage. Intuitif.

b. Relation $\rho \leftrightarrow n$: $\rho = nq$

$\hookrightarrow \rho_+ = +e n_+$ et $\rho_- = -e n_-$

densité volumique totale de charges: $\rho_c = \rho_+ + \rho_- = e(n_+ - n_-)$

$$\boxed{\rho_c = e n_e \left(\exp\left(-\frac{eV(r)}{k_B T}\right) - \exp\left(+\frac{eV(r)}{k_B T}\right) \right) = -2e n_e \sinh\left(\frac{eV(r)}{k_B T}\right)}$$

c. Localement, le potentiel vérifie l'équation de Poisson:

$$\boxed{\Delta V + \frac{\rho_c}{\epsilon} = 0}$$

Démo: Maxwell - Gauss: $\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho_c}{\epsilon}$

en statique: $\vec{E} = -\text{grad}(V)$

$\text{div}(\text{grad}(V)) + \frac{\rho_c}{\epsilon} = 0$ or $\text{div}(\text{grad}(\dots)) = \Delta(\dots)$

$$\boxed{\Delta V + \frac{\rho_c}{\epsilon} = 0}$$

Avec le Laplacien fourni:

$$\boxed{\frac{1}{r} \frac{d^2(rV(r))}{dr^2} - \frac{2e n_e}{\epsilon} \sinh\left(\frac{eV(r)}{k_B T}\right) = 0}$$

d. si $eV(r) \ll k_B T$
 alors $\ln\left(\frac{eV(r)}{k_B T}\right) \sim \frac{eV(r)}{k_B T}$ au 1er ordre.

on obtient donc :

$$\frac{1}{r} \frac{d^2(rV(r))}{dr^2} - \frac{2e \cdot n_e}{\epsilon_0} \frac{eV(r)}{k_B T} = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2 u(r)}{dr^2} - \frac{2e^2 n_e}{\epsilon k_B T} u(r) = 0}$$

au pos
 $u(r) = r V(r)$

$\frac{2e^2 n_e}{\epsilon k_B T} > 0 \rightarrow$ solution : combinaison linéaire d'exponentielles réelles

$$u(r) = A_1 \exp\left(\frac{2e^2 n_e}{\epsilon k_B T} r\right) + A_2 \exp\left(-\frac{2e^2 n_e}{\epsilon k_B T} r\right)$$

au pos $\boxed{\lambda_D^2 = \frac{\epsilon k_B T}{2e^2 n_e}}$

$$\boxed{u(r) = A_1 \exp\left(\frac{r}{\lambda_D}\right) + A_2 \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right)} \Rightarrow \boxed{V(r) = \frac{A_1}{r} \exp\left(\frac{r}{\lambda_D}\right) + \frac{A_2}{r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right)}$$

• dimension de λ_D : $[k_B T] = [\text{énergie}]$

$$[\lambda_D^2] = \left[\frac{\epsilon}{e}\right] \cdot \frac{[k_B T]}{[e] \cdot [n_e]}$$

$$= \frac{[\text{énergie}]}{[\text{champ } \vec{E}] \cdot L^2 [e]}$$

$$= \frac{[\text{énergie}] \cdot L}{[\text{Force}]} = L^2 \quad \checkmark$$

Thm de Gauss : $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon}$

$$\rightarrow \left[\frac{e}{\epsilon}\right] = [\text{champ } \vec{E}] \cdot L^2$$

$$\text{et } [n_e] = L^{-3}$$

$$[F_{\text{elec}}] = [e \vec{E}]$$

travail : $[dW] = [\vec{F} \cdot d\vec{l}]$

Conditions aux limites :

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} V(r) = 0 \Rightarrow A_1 = 0$$

$$\boxed{V(r) = \frac{A_2}{r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right)}$$

- $r \rightarrow 0^+ : \cong$ "Voisinage immédiat de l'ion"

au fait c'est si Ar^+ était seul $\rightarrow$ charge +e ponctuelle

potentiel généré par une charge ponctuelle : $V_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}$

donc pour $r \ll \lambda_D$

$$\exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) \sim 1 - \frac{r}{\lambda_D} \text{ à l'ordre 1.}$$

$$\text{et } V(r) = \frac{A_2}{r} \left(1 - \frac{r}{\lambda_D}\right) \quad \text{au en déduisant}$$

↓
reflexe

$$A_2 = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}$$

le potentiel doit être celui
d'une charge ponctuelle au voisinage
direct de l'ion Ar^+ .

Fonction : $V(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right)$) potentiel de la
plasma.

Commentaire :

- Analogie formelle avec le potentiel de Yukawa.

- décroissance du potentiel avec r bien plus rapide que en plasma ($\propto \frac{\exp(-r/\lambda_D)}{r}$)
que de la vide ($\propto \frac{1}{r}$)

Ceci se attribue à la présence d'autres charges au voisinage de
 Ar^+ . On parle d'ÉCRANTAGE (e^- négatives attirées par Ar^+)

- La décroissance de V est contrôlée par une longueur caractéristique λ_D
qui donne un ordre de grandeur de l'écrantage.

g - P_c est donnée par l'équation de Poisson :

$$P_c = -\epsilon_0 \Delta V$$

$$r V(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right)$$

$$\frac{d^2(rV(r))}{dr^2} = \frac{+e}{4\pi\epsilon_0 \lambda_D^2} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right)$$

on en déduit donc :

$$P_c(r) = \frac{-e}{4\pi\epsilon_0 \lambda_D^2 r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right)$$

charge totale Q (de la sphère de rayon r)

⚠ f_c est la densité volumique de charge associée aux électrons et aux ions environnants. Elle ne compte pas l'ion Ar^+ en o

$$\Phi(r) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ion } Ar^+ \\ \text{en } o}}{e} + \int_{\substack{\text{sphère de rayon } r}} f_c(r') \cdot dV = e + \int_0^r \frac{-e}{4\pi\lambda_D^2 r'} \exp\left(-\frac{r'}{\lambda_D}\right) \underbrace{4\pi r'^2 dr'}_{\substack{\text{volume} \\ \text{d'une coquille} \\ \text{sphérique} \\ \text{entre } r \text{ et } r+dr}}$$

$$\Phi(r) = e \left(1 - \frac{1}{\lambda_D^2} \int_0^r r' \exp\left(-\frac{r'}{\lambda_D}\right) dr' \right)$$

par intégration par parties : $\int_0^r r' \exp\left(-\frac{r'}{\lambda_D}\right) dr' = -r\lambda_D \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right)$

$$- \lambda_D^2 \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) + \lambda_D^2$$

$$\boxed{\Phi(r) = e \left(1 + \frac{r}{\lambda_D} \right) \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right)}$$

• limites :

* $r \rightarrow 0$: $\Phi \longrightarrow e$: la sphère ne contient que l'ion Ar^+ localisé en $r = 0$

* $r \rightarrow +\infty$: $\Phi \longrightarrow 0$: le plasma est globalement neutre au vu de l'ion l'électroneutralité

h. AN. $\lambda_D(T_1) = 2,0 \cdot 10^{-8} \text{ m} = 20 \text{ nm}$.

$\lambda_D(T_2) = 8,9 \cdot 10^{-8} \text{ m} = 89 \text{ nm}$.

l'influence par écrantage des ions sont sensibles sur des distances faibles de l'ordre de la dizaine de nm.

Partie 2 - Identification de particules ds une chambre à projection temporelle

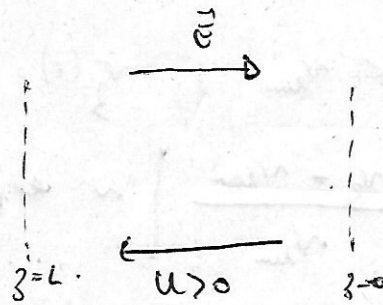


a. Bilan de forces: $\vec{P}$: néglige

potentiel: $\vec{F} = -\mu \vec{v}$

électrique: $\vec{F}_e = -e \vec{E}$

magnétique: $\vec{F}_m = -e \vec{v} \wedge \vec{B} = -e \begin{vmatrix} v_x B \\ -v_y B \\ 0 \end{vmatrix}$



$$U = \int g \vec{a} \cdot d\vec{l} = -E_z \cdot L \quad (\text{avec } \vec{E}_z < 0, \vec{E}_z = -\vec{E})$$

donc $\boxed{\vec{F}_e = e \frac{U}{L} \vec{e}_z}$

RPD: sur $\vec{e}_x$: $m_e \frac{dv_x}{dt} = -\mu v_x - e v_y B$ (1)

sur $\vec{e}_y$: $m_e \frac{dv_y}{dt} = -\mu v_y + e v_x B$ (2)

sur $\vec{e}_z$: $m_e \frac{dv_z}{dt} = -\mu v_z + e \frac{U}{L} + 0$ (3)

(3) $\rightarrow \dot{v}_z(t) + \frac{\mu}{m_e} v_z(t) = \frac{e U}{m_e L}$

on pose $\tau = m_e / \mu$

en RP: $t \rightarrow +\infty$ et $\dot{v}_z = 0$

$$v_z = \left[v_{\text{lim}} = \frac{e U}{\mu L} \right]$$

on obtient donc: $\boxed{\dot{v}_z(t) + \frac{1}{\tau} v_z(t) = \frac{v_{\text{lim}}}{\tau}}$

Soluti: $v_z(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + v_{\text{lim}}$

en $t=0$: $v_z(0) = v_{e_z} = A + v_{\text{lim}} \rightarrow A = v_{e_z} - v_{\text{lim}}$

$$\boxed{v_z(t) = (v_{e_z} - v_{\text{lim}}) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + v_{\text{lim}}}$$

b. AN: $v_{lim} \approx 5 \cdot 10^4 \text{ m/s}$

si $v_z \ll v_{lim}$: $v_z(t) = v_{lim} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right)$

donc $\left| \frac{v_z - v_{lim}}{v_{lim}} \right| \sim \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

on cherche donc τ tq : $\exp\left(-\frac{\tau}{\tau}\right) = 0,01$

$$\boxed{\tau = 2\tau \ln 10}$$

AN: $\tau \approx 4,37 \cdot 10^{-10} \text{ s}$

c. si $\underline{u} = v_x + i v_y$

on fait : $\frac{1}{m_e} (\dot{u}) + i (\dot{u})$

$$\ddot{\underline{u}} + \frac{1}{\tau} \dot{\underline{u}} = \frac{eB}{m_e} (i v_x - v_y) = i \omega_c (v_x + i v_y) = i \omega_c \cdot \underline{u}$$

$$\boxed{\ddot{\underline{u}} + \left(\frac{1}{\tau} - i \omega_c \right) \dot{\underline{u}} = 0}$$

$$\rightarrow \underline{u}(t) = \underline{B} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \exp(i \omega_c t)$$

$$\underline{u}(0) = \underline{B} = v_x(0) + i v_y(0) = v_{en} \quad (\vec{v}_e \cdot \vec{e}_y = v_{ey} = 0)$$

$$\underline{u}(t) = v_{en} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \exp(i \omega_c t)$$

$$\underline{u}(t) = v_{en} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \left[\cos(\omega_c t) + i \sin(\omega_c t) \right]$$

on a donc

$$\boxed{\begin{aligned} v_x(t) &= \text{Re}(\underline{u}) = v_{en} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \cos(\omega_c t) \\ v_y(t) &= \text{Im}(\underline{u}) = v_{en} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \sin(\omega_c t) \end{aligned}}$$

d. au bout de quelques τ : $v_x \rightarrow 0$
 $v_y \rightarrow 0$

donc $\vec{v} \rightarrow v_z \cdot \vec{e}_z = v_{lim} \vec{e}_z$: Mvt rectiligne et uniforme

en négligeant le régime transitoire, et en considérant le mvt rectiligne et uniforme on obtient : $z(t) = v_{lim} t + z_0$ avec z_0 l'altitude de l'émission de la particule fille.

du durch t_L t_q :

$$z(t_L) = L = v_{\text{lim}} t_L + z_0$$

$$\boxed{z_0 = L - v_{\text{lim}} t_L}$$

→ on peut accéder à z_0 connaissant t_L .

Etude des champs proportionnels à fils

e. 1 electron → N ions.

$$\frac{1}{2} e U' \cdot N_A = N \epsilon_i$$

énergie d'une mole d'électrons

(au niveau particulaire :

$$e U' = 2 N e_i$$

énergie d'ionisation d'un atome de

$$\boxed{N = \frac{\frac{1}{2} e U' N_A}{\epsilon_i}}$$

AN : $N = 47$ ionisations

f. fil cylindrique infini

Coordonnées cylindriques

$$\vec{E}_f = \vec{E}_f(r, \theta, z)$$

• Invariances : $\partial/\partial z$

$$\vec{E}_f = \vec{E}_f(r)$$

• Symétrie

$\pi_1 = (r, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$: plan de sym de la distribution

$\pi_2 = (r, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$:

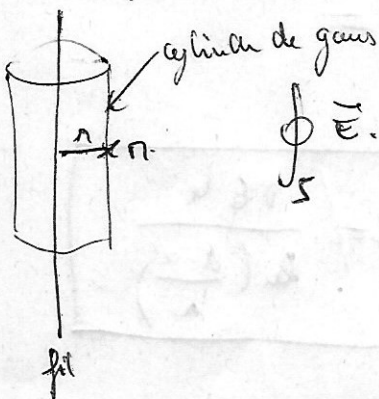
$$\left. \begin{array}{l} \vec{E}_f(r) \in \pi_1 \\ \vec{E}_f(r) \in \pi_2 \end{array} \right\} \vec{E}(r) \in \pi_1 \cap \pi_2$$

$$\boxed{|\vec{E}_f(r)| \parallel \vec{e}_r}$$

$$\rightarrow \vec{E}_f(r) = E_f(r) \vec{e}_r$$

Théorème de Gauss.

↳ Surface de Gauss : cylindre de rayon r de hauteur h d'axe Oz .



$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = E(r) \cdot 2\pi r h = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda \cdot h}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r}$$

potentiel électrostatique

$$\vec{E}_g = -\text{grad}(V)$$

en cylindrique, sur $\vec{e}_r$: $\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = -\frac{\partial V(r)}{\partial r}$

$$\rightarrow \boxed{V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) + K.}$$

g- Fil + : $\rightarrow V_+(r_1) = -\frac{\lambda_+}{2\pi\epsilon_0} \ln(r_1) + K_+.$

Fil - : $\rightarrow V_-(r_2) = -\frac{\lambda_-}{2\pi\epsilon_0} \ln(r_2) + K_- = +\frac{\lambda_+}{2\pi\epsilon_0} \ln(r_2) + K_-$ $\lambda_- = -\lambda_+$

par principe de superposition (linéarité de l'équation de Poisson)

$$V(r) = \frac{\lambda_+}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + K_+ + K_-$$

au milieu des 2 fils, $r_1 = r_2$.

$$V\left(\frac{d}{2}\right) = 0 + K_+ + K_- = 0$$

on a donc $\boxed{V(r) = \frac{\lambda_+}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 h} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$

Capacité : potentiel des fils 1 : $V_1 \leftarrow$ en $r_1 = a$ et $r_2 = d-a$.
2 : $V_2 \leftarrow$ en $r_1 = d-a$ et $r_2 = a$) par continuité de V

$$V_1 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 h} \ln\left(\frac{d-a}{a}\right)$$

$$V_2 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 h} \ln\left(\frac{a}{d-a}\right) = -V_1$$

tension entre les 2 fils

$$U = V_1 - V_2 = 2V_1 = \frac{q}{\pi\epsilon_0 h} \ln\left(\frac{d-a}{a}\right)$$

charge portée par une longueur h de fil.

$$= CU = C \cdot \frac{q}{h} \ln\left(\frac{d-a}{a}\right) \rightarrow$$

$$\boxed{C = \frac{\pi\epsilon_0 h}{\ln\left(\frac{d-a}{a}\right)}}$$

AN : $\boxed{C = 4,0 \cdot 10^{-11} \text{ F}}$

b. en RP : $i = 0$ ($\downarrow$ $\uparrow$ $\Rightarrow$ $\downarrow$)

$$U_c = W = q_0 / C \rightarrow q_0 = C \cdot W$$

$$\underline{AN : q_0 = 4,10 \cdot 10^{-14} \text{ C.}}$$

$$\underline{q_1 = 2,4 \cdot 10^{-14} \text{ C.}}$$

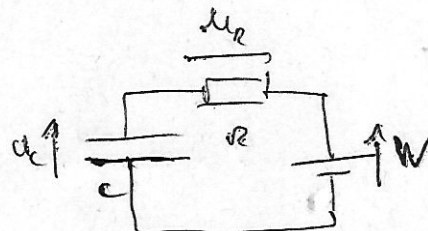
$$U_R + U_c = W$$

$$\dot{U}_R + \dot{U}_c = 0$$

$$\boxed{\dot{U}_R + \frac{1}{RC} U_R = 0}$$

$$\text{et } i = C \frac{dU_c}{dt}$$

$$\frac{U_R}{R} = C \frac{dU_c}{dt}$$



$$U_R(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \text{ avec } \tau = RC.$$

$$U_R(0) = A = W - U_c(0) = \frac{q_0}{C} - \frac{q_1}{C} = \frac{q_0 - q_1}{C}.$$

$$\boxed{U_R(t) = \frac{q_0 - q_1}{C} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

i. le phénomène d'influence doit avoir une durée négligeable.
il faut $\tau' \ll \tau = RC$.

$$R \gg \frac{\tau'}{C} \sim 25 \Omega.$$

en $t=0$: U_R st une mesure de la charge issue de l'avalanche (q_1)

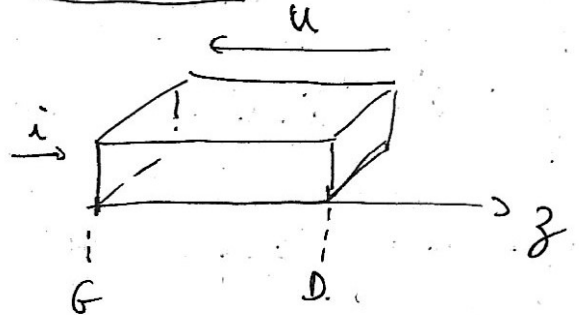
si q_1 st grand, $U_R(0)$ st grand st a plus de chances d'être facilement mesurable.

si on mesure une ddp entre 2 fils voisins, c'est pu'il y a eu une avalanche à son voisinage. En réalisant un quadrillage, on peut donc mesurer des ddp pr des fils selon Ox et selon Oy et donc localiser ds le plan (xy) l'avalanche, donc l'ionisation. Résolution spatiale du dispo : écart entre les fils.

A. Création d'un champ magnétique intense à l'aide d'un solénoïde

a. loi d'Ohm locale : $\vec{j}_e = \gamma \vec{E} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\vec{j}_e}{\gamma}}$

b. $\mathcal{I} := \int \vec{j}_e \cdot d\vec{S} \xrightarrow{\substack{= \\ j_e \text{ uniforme}}} j_e \cdot S$



$\mathcal{U} = V_G - V_D = \int_0^G dV$

$= - \int \vec{\nabla} \phi(r) \cdot d\vec{l} = - \int_D^G \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{j_e}{\gamma} (z_G - z_D) \quad z_G - z_D = -h$

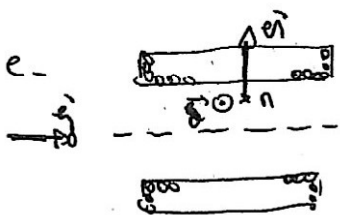
$= - \frac{j_e h}{\gamma} = - \frac{\mathcal{I}}{\gamma} \frac{h}{S}$

c. loi d'Ohm : $\mathcal{U} = R_e \mathcal{I} \Rightarrow \boxed{R_e = \frac{1}{\gamma} \frac{h}{S}}$

d. (i) 1 couche :

densité linéique de spire : $n_1 = \frac{N}{L} = \frac{N}{N \cdot d} = \frac{1}{d}$

(ii) par p couches : $\boxed{n_p = \frac{p}{d}}$



Coordonnées cylindriques : $\vec{B}(r) = B(r) \vec{e}_\theta$

invariances : rotation selon θ

translation selon z (solénoïde ∞)

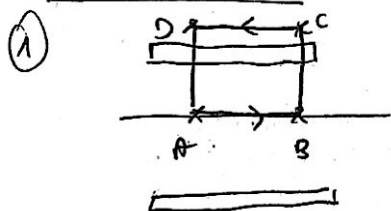
Symétries : $(r, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta) =$ plan de symétrie des courants

$\Rightarrow \vec{B}(r) \perp (r, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$

$\vec{B}(r) = B(r) \vec{e}_\theta = B(r) \vec{e}_\theta$

Théorème d'Ampère

Circuit d'Ampère : $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$

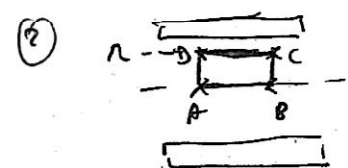


$$\oint_{ABCD} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{enc}} = 0$$

Idem de l'autre côté : $B_{\text{exterieur}} = 0 \Rightarrow \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$ car $B = 0$

$$\bullet \int_B^C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_A^D \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \text{car } \vec{B} (\parallel \vec{e}_y) \perp d\vec{l} (\parallel \vec{e}_x)$$

on a donc : $B(r=0) \cdot AB = \mu_0 \frac{P}{d} i$



$$\oint_{ABCD} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 = AB \cdot B(r) - DC \cdot B(r)$$

$$AB = DC \quad (\text{largeur} > 0)$$

$$B(r) = B(r)$$

$$\boxed{\vec{B}(r) = \mu_0 \frac{P}{d} i \vec{e}_y} \quad \text{à l'intérieur du solénoïde.}$$

(ii). AN : $\rho = \frac{B \cdot d}{\mu_0 i} \Rightarrow \rho = 137 \text{ cordes !}$

f - (i) on fait $\hat{c}$ si les spires étaient entourées de rayon R_{moy} .

$$L_{\text{fil}} = 2\pi R_{\text{moy}} \cdot N \cdot \rho = 2\pi R_{\text{moy}} \frac{L}{d} \cdot \rho$$

(ii). AN : $L_{\text{fil}} \simeq 2,6 \cdot 10^5 \text{ m} \quad (\simeq 260 \text{ km})$

g - (i) en utilisant la formule établie en c

$$R_{\text{elec}} = \frac{1}{\gamma} \frac{L_{\text{fil}}}{\pi \frac{d^2}{4}} = \frac{4 L_{\text{fil}}}{\gamma \pi d^2}$$

(ii) AN : $R_{\text{elec}} \simeq 609 \Omega$

puissance Joule : $P_{\text{Joule}} = R_{\text{elec}} I^2 \simeq 745 \text{ kW !}$

$$\left(\gamma_{\text{cu}} (300 \text{ K}) = 6 \cdot 10^7 \text{ S m}^{-1} \right)$$

h. (i) au a tajaano $B = \mu_0 \frac{I'}{d} \hat{i}'$

$\hookrightarrow \boxed{p' = 60 \text{ cordons}}$

(ii) $L'_{pl} = 2\pi R'_{\text{mag}} \frac{L}{d} p' = 80 \text{ km}$

$R'_{\text{dec}} = \frac{4L'_{pl}}{\gamma_m \pi d^2}$

$\Delta \gamma_m \text{ pour } \sim 10^4 \text{ K } (3.3 \cdot 10^8 \text{ s m}^{-1})$

$\approx 38,8 \Omega$

$P'_{\text{tot}} = P'_{\text{dec}} \cdot \gamma^{1/2} = 248 \text{ kW} \rightarrow \text{au a jayri na factor 3!}$

i. (i). 1^{er} principe: $\Delta U = 0$ sur un cycle de fonctionnement (U est d'état)

$0 = W + Q_f + Q_c$

$\uparrow \quad \uparrow$
transferts thermiques
venant de la source froide (f) et chaude (c)

Inégalité de Clausius (2nd principe sur un cycle de fonctionnement)

$\frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_c}{T_c} \leq 0 \quad (\text{car entropie créée} \geq 0)$

Efficacité réfrigérante:

$e = \frac{Q_f}{W} \leftarrow \text{"Ce qui nous gagne"}$

$W \leftarrow \text{payé à EDF sous forme électrique}$

$(Q_f > 0)$

$(W > 0)$

$e = \frac{Q_f}{W} = \frac{Q_f}{-Q_f - Q_c} = \frac{-1}{1 + \frac{Q_c}{Q_f}}?$

$\rightarrow$ Clausius:

$\frac{Q_c}{T_c} \leq \frac{-Q_f}{T_f} \Rightarrow \frac{Q_c}{Q_f} \leq -\frac{T_c}{T_f} \quad (Q_f > 0, T_c > 0)$

$1 + \frac{Q_c}{Q_f} \leq 1 - \frac{T_c}{T_f}$
 $\frac{-1}{1 + \frac{Q_c}{Q_f}} \leq \frac{-1}{1 - \frac{T_c}{T_f}} = \frac{T_f}{T_c - T_f}$

$$\rightarrow e \leq \frac{T_F}{T_C - T_F}$$

efficacité du cycle de Carnot obtenu ds le cas réversible

$$e_{rev} = \frac{T_F}{T_C - T_F}$$

(ii). AN : $e_{rev} \simeq 0,35$

j - la machine frigorifique doit dissiper P' avec une efficacité env

$$P' = \frac{P'_{salle}}{e_{rev}} \quad \left(\begin{array}{l} \text{bobine : sera froide} \\ \text{air ambiant : — chaude} \end{array} \right)$$

AN : $P' \simeq 715 \text{ kW} \rightarrow$ Peu de gain par rapport au cas non refroidi (765 kW)

B - Puissance dissipée ds le supra bas des mêmes conditions

a - la valeur maximale de I & obtenue lorsque l'te la section du fil & parcourue par un courant : $I_c = j_0 \cdot \pi R^2$

b - $\mu = \frac{I_0}{I_c} = \frac{I_0}{j_0 \pi R^2}$

c. (i) - hors statisme le courant ne voyage que sur une couronne

(ii)
(iii)

$$\rightarrow I(t) = j_0 \cdot \pi (R^2 - r_1^2(t)) \Rightarrow I(t) = j_0 \pi R^2 \cdot \left(1 - \frac{r_1^2}{R^2} \right)$$

$$I(t) = \frac{I_0}{\mu} \left(1 - \frac{r_1^2}{R^2} \right) \Rightarrow \boxed{r_1 = R \cdot \sqrt{1 - \mu \frac{I(t)}{I_0}}}$$

$$\boxed{r_1(t) = R \sqrt{1 - \mu \frac{t}{T}}}$$

$$\rightarrow \boxed{r_1(T) = R \sqrt{1 - \mu}}$$



b. (i) $\rightarrow$ coordonnées cylindriques

$$\hookrightarrow \vec{B}(\eta, t) = \vec{B}(\eta, \theta, z, t)$$

Invariances : θ (cyclic)

z (l'énergie indique une invariance suivant z pour $\vec{J}$, il en va de même pour $\vec{B}$)

$\hookrightarrow$ i.e., on néglige les effets de bords

$$\boxed{\vec{B}(\eta, t) = \vec{B}(\eta, t)}$$

Symétries : l'énergie indique $\vec{J} = j_e(\eta, t) \vec{e}_z$ (sola de $\vec{B}$)

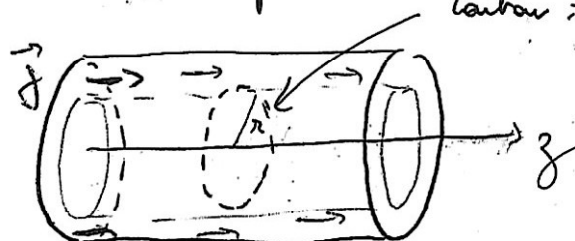
donc $(\eta, \vec{e}_\eta, \vec{e}_z) \uparrow$ un plan de symétrie de $\vec{J}$

$$\hookrightarrow \vec{B} \perp (\eta, \vec{e}_\eta, \vec{e}_z) \Rightarrow \vec{B}(\eta) = B(\eta) \vec{e}_\theta$$

Finalement : $\boxed{\vec{B}(\eta, t) = B(\eta, t) \vec{e}_\theta}$

(ii). Loi d'Ampère

(iii)



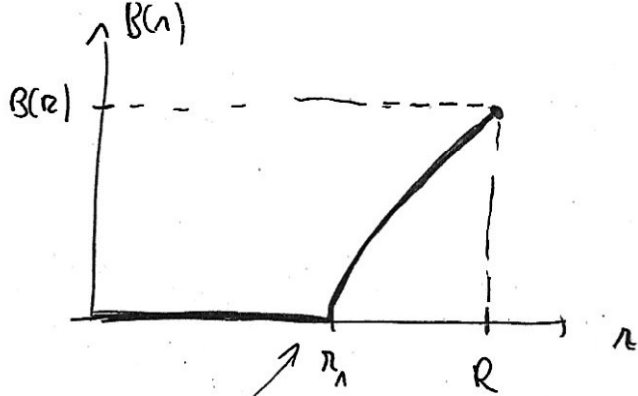
Canton : cercle de rayon r centré sur $(0, z)$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 I_{\text{enc}}^{\text{enc}}$$

$$B(\eta, t) \cdot 2\pi r = \mu_0 \begin{cases} 0 & \text{si } r < r_1 \\ j_e \pi (r^2 - r_1^2(t)) & \text{si } r_1 < r < R \\ j_e \pi R^2 & \text{si } r > R \end{cases} \quad \begin{matrix} \\ \\ \text{3e cas non} \\ \text{demandé.} \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} B(\eta, t) = 0 & \text{si } r < r_1 \\ B(\eta, t) = \frac{\mu_0}{2r} j_e (r^2 - r_1^2(t)) & \text{si } r_1 < r < R \end{cases}$$

(iv).



Continuité de B

(les courants ne pas nécessairement répartis en surface)

$$B(R) = \frac{\mu_0 j}{2R} (R^2 - r_1^2) > 0$$

R_0 : concavité de la courbe.

$$B(r) = \frac{\mu_0 j}{2} \left(r - \frac{r_1^2}{r} \right)$$

$$\frac{\partial B}{\partial r} = \frac{\mu_0 j}{2} \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} = -\mu_0 j \frac{r_1^2}{r^3} < 0 \quad \text{pour } j > 0$$

→ fonction concave

l. Maxwell-Faraday: $\vec{\nabla} \times (\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (1^{ge} mde)

Cette loi permet d'expliquer le phénomène d'induction.

m. par $r < r_1$, $B = 0 \Rightarrow \forall t, \vec{E}(r < r_1, t) = \vec{K}(t) = 0$

n. par $r_1 < r < R$ $\vec{E} = E(r, t) \vec{e}_\phi$ ↑
énergie

$$\vec{\nabla} \times (\vec{E}) = -\frac{\partial E(r, t)}{\partial r} \vec{e}_\phi = -\frac{\partial B(r, t)}{\partial t} \vec{e}_\phi \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial r} = \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\text{or } B(r, t) = \frac{\mu_0 j_0 r}{2} \left(1 - \frac{r_1(t)^2}{r^2} \right)$$

$$\frac{\partial B(r, t)}{\partial t} = -\frac{\mu_0 j_0}{r} r_1(t) \cdot \frac{\partial r_1}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E(r)}{\partial r} = -\frac{\mu_0 j_0}{r} r_1 \frac{\partial r_1}{\partial t} \Rightarrow E(r, t) = -\mu_0 j_0 \ln(r) \cdot r_1 \frac{\partial r_1}{\partial t} + C(t)$$

Continuité en $r = r_1$

$$E(r_1) = -\mu_0 j_0 \ln(r_1) \cdot r_1 \frac{\partial r_1}{\partial t} + C = 0$$

$$\hookrightarrow C = \mu_0 j_0 \ln(r_1) \cdot r_1 \frac{\partial r_1}{\partial t}$$

$$\rightarrow E(r,t) = -\mu_0 j_0 \ln\left(\frac{R}{r_1}\right) r_1 \frac{\partial r_1}{\partial t}$$

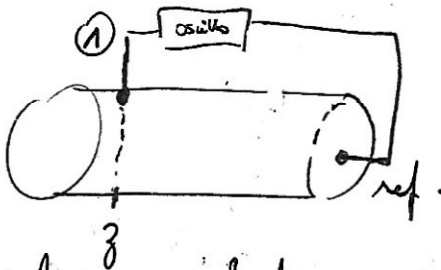
or d'après le question c : $r_1(t) = R \sqrt{1 - u \frac{t}{T}}$

$$\frac{\partial r_1}{\partial t} = \frac{R}{2\sqrt{1 - \frac{ut}{T}}} \times \left(-\frac{u}{T}\right)$$

$$\rightarrow r_1 \frac{\partial r_1}{\partial t} = -\frac{R^2}{2T} u = -\frac{R^2}{2T} \frac{I_0}{j_0 \pi R^2}$$

$$\rightarrow \boxed{E(r,t) = + \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R}{r_1}\right)} \quad \checkmark$$

0. Unité de $\vec{E}$: $V m^{-1}$ (par rappel : en statisme : $\vec{E} = -\text{grad}(V)$
 $\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial n} \vec{a}_n$ par exemple)



on place une électrode ref en $r=0$ ($\vec{E} \rightarrow 0$)
 et une 2^{ème} sur la face latérale du cylindre supra.

$\rightarrow$ (1) mesure $V(z)$. on déplace cette électrode on obtient $z \rightarrow V(z)$.

$\rightarrow$ on dérive et on obtient $\vec{E}$ au même point



cette méthode n'est pas rigoureuse.

on n'est pas en statisme, donc $\vec{E} \neq -\text{grad}(V)$

hors statisme : $\vec{E} = -\text{grad}(V) - \underbrace{\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}_{\text{potentiel vecteur}}$

on fait l'hypothèse que c'est petit.

p. puissance dissipée par effet Joule.

$$p_r(r,t) = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

⚠ Ne pas écrire : $\vec{j} = \sigma \vec{E}$
 supraconducteur $\neq$ conducteur ohmique

$$\rightarrow p_r(r,t) = 0 \text{ pour } r < r_1$$

$$\rightarrow p_r(r,t) = \frac{\mu_0 j_0 I_0}{2\pi T} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) \text{ pour } r_1 < r < R.$$

(les métriques de conduction st $\neq$)

q- $P_{\text{elec}} = \int_{\text{tube entre } r_1 \text{ et } R} p_r(r,t) dV$

$$\rightarrow dV = 2\pi r \cdot dr \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{longueur du supra}}}{L_{\text{supra}}}$$

$$= \frac{\mu_0 j_0 I_0}{2\pi T} 2\pi L \int_{r_1}^R r \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) dr$$

$$= \frac{\mu_0 j_0 I_0}{T} L \left[\frac{r^2}{2} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) - \frac{r^2}{4} \right]_{r_1}^R$$

annule.

$$= \frac{\mu_0 j_0 I_0}{T} L \left(\frac{R^2}{2} \left(\ln\left(\frac{R}{r_1}\right) - \frac{1}{2} \right) + \frac{r_1^2}{4} \right)$$

$$= \frac{\mu_0 I_0}{T} L \frac{I_0}{\mu \cdot \pi R^2} \left(\frac{R^2}{2} \left(\ln\left(\frac{R}{r_1}\right) - \frac{1}{2} \right) + \frac{R^2}{4} \left(1 - \mu \frac{t}{T} \right) \right)$$

$$= \frac{\mu_0 I_0^2}{\mu \pi R^2} \frac{L}{T} \frac{R^2}{2} \left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \mu \frac{t}{T}}}\right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \mu \frac{t}{T} \right) \right)$$

$$= -\frac{\mu_0 I_0^2}{4\pi \mu} \cdot \frac{L_{\text{supra}}}{T} \left(\ln\left(1 - \mu \frac{t}{T} \right) + \mu \frac{t}{T} \right)$$

2 $Q = \int_0^T P_{\text{elec}}(t) \cdot dt$

$$= -\frac{\mu_0 I_0^2}{4\pi \mu} \frac{L_{\text{supra}}}{T} \left(\left(\frac{T}{\mu} \right) \left[\left(1 - \frac{\mu t}{T} \right) - \left(1 - \frac{\mu t}{T} \right) \ln\left(1 - \frac{\mu t}{T} \right) \right]_0^T + \frac{\mu}{2T} [t^2]_0^T \right)$$

$$= -\frac{\mu_0 I_0^2}{4\pi \mu} \frac{L_{\text{supra}}}{T} \left(\frac{T}{\mu} \left(1 - \mu \right) - (1 - \mu) \ln(1 - \mu) - 1 \right) + \frac{\mu T}{2}$$

$$\Phi = + \frac{\mu_0 I_0^2}{4\pi n} L_{\text{sup}} \left(\frac{(1-n) \ln(1-n)}{n} + 1 - \frac{n}{2} \right)$$

(ii). On voit que Φ est indépendant de T
 et n'est donc pas able d'augmenter la durée
 d'établissement du courant.

$$e = \frac{\Phi}{\Phi_{\text{amb}}} \rightarrow \Phi_{\text{amb}} = \frac{\Phi}{e}$$

AN : $\Phi_{\text{amb}} \approx 160 \text{ kJ}$ pas mal!