

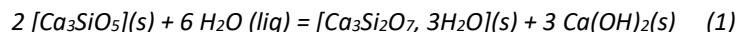
- L'usage de la calculatrice est interdit.
- Un résultat non démontré peut être utilisé pour la suite du problème.
- Tout résultat fourni sans justification ainsi que toute application numérique sans unité seront considérés comme sans valeur.
- On accordera la plus grande importance à la concision et la clarté de la rédaction. En particulier, encadrer les résultats.
- Les données utiles sont fournies à la fin de chaque problème

1. Le béton (Extrait Mines-Ponts)

Ce problème s'intéresse à l'étude de quelques propriétés physico-chimiques du ciment et des bétons armés. Le clinker est le principal constituant d'un ciment, il est obtenu à partir d'un mélange de 80% de calcaire ($CaCO_3(s)$) et de 20% d'argile (silicoaluminates). Le ciment est principalement utilisé pour fabriquer le béton qui est un mélange de ciment, sable, granulats et eau. Le béton forme après la « prise » une véritable roche artificielle. La « prise » est le phénomène de durcissement en présence d'eau.

1.1. Prise d'un béton.

Le ciment est modélisé par la seule espèce $[Ca_3SiO_5](s)$. La réaction à l'origine de la « prise » est volontairement simplifiée sous la forme suivante :



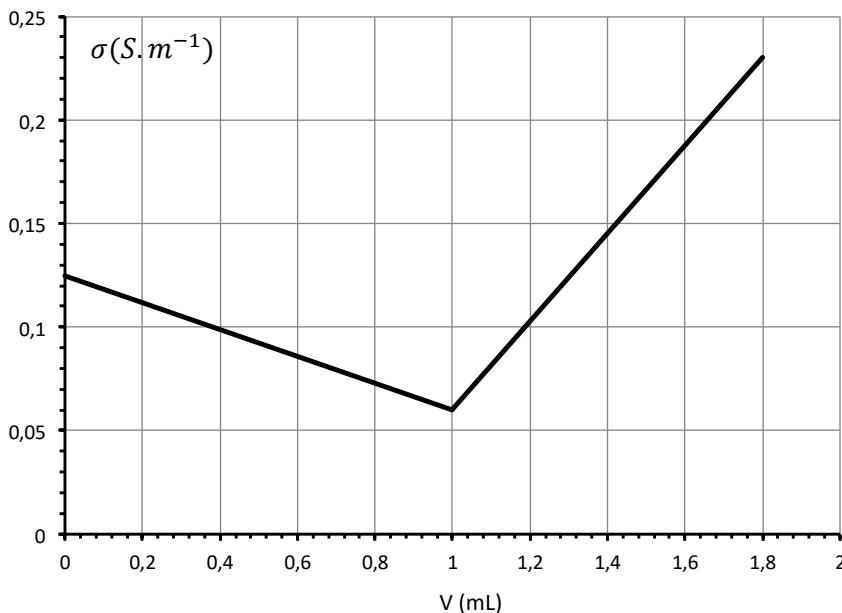
On considère l'espèce hydratée $[Ca_3Si_2O_7, 3H_2O](s)$ comme un produit unique.

On mélange rapidement $m_1=228\text{ g}$ de ciment et $m_2=90\text{ g}$ d'eau liquide dans un calorimètre et on place un dispositif de mesure de la température. On mesure une élévation de la température : $\Delta\vartheta=15,0\text{ }^{\circ}\text{C}$.

- En supposant la réaction totale, indiquer quel est le réactif limitant et calculer les quantités de matière en chacune des espèces présentes en fin d'évolution.
- Le système constitué par le calorimètre et son contenu sont supposés en évolution adiabatique. Estimer la valeur de l'enthalpie standard de réaction Δ_rH° associée à l'équation-bilan (1). On négligera la capacité thermique du calorimètre.

1.2. Basicité d'un béton.

L'hydroxyde de calcium $Ca(OH)_2(s)$ confère à l'eau qui se trouve dans les pores du béton (solution interstitielle) un caractère fortement basique. On étudie une solution aqueuse recueillie à la surface du béton après la prise, modélisée par une solution contenant des ions Ca^{2+} et OH^- (compte tenu de la solubilité de l'hydroxyde de calcium). Le volume prélevé est égal à $V_0=100,0\text{ mL}$, il est titré par une solution d'acide chlorhydrique concentré (H_3O^+ , Cl^-) de concentration $c=0,50\text{ mol.L}^{-1}$. Le titrage est suivi par conductimétrie (mesure de la conductivité σ de la solution titrée en fonction du volume v de titrant ajouté). Le résultat expérimental est présenté ci-après.



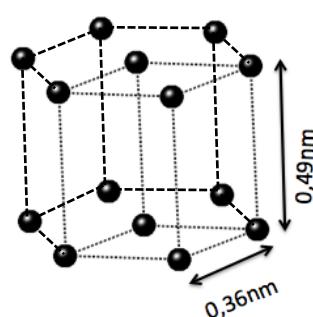
- c. Ecrire la réaction de titrage et indiquer la valeur de sa constante d'équilibre à 298 K.
- d. Quel est le pH de la solution prélevée à la surface du béton ?
- e. Justifier qualitativement (sans calcul) mais de façon détaillée l'allure de la courbe conductimétrique $\sigma = f(v)$ obtenue.
- f. Dessiner l'allure de la courbe qui aurait été obtenue à l'occasion d'un suivi pH-métrique, préciser la valeur du pH au point équivalent.
- g.

1.3. Carbonatation d'un béton.

Le dioxyde de carbone présent dans l'atmosphère peut se dissoudre en solution aqueuse. Dans le cas des solutions basiques il se dissout sous forme d'ions carbonate CO_3^{2-} . Lorsque le phénomène se produit sur un béton, les ions carbonate issus du dioxyde de carbone peuvent remplacer les ions HO^- de l'hydroxyde de calcium (formation de $CaCO_3(s)$). On parle alors de carbonatation d'un béton, conduisant à une fragilisation de sa structure. On étudie dans cette partie le carbonate de calcium (de type calcite).

- h. Rappeler les règles générales permettant d'établir la configuration électronique d'un atome dans l'état fondamental et les appliquer à l'atome de calcium. Pourquoi le calcium forme-t-il des ions Ca^{2+} de façon privilégiée ?
- i. Etablir, en justifiant rapidement, le diagramme de prédominance des espèces en solution du carbone : $H_2CO_3(aq)$; $HCO_3^-(aq)$; $CO_3^{2-}(aq)$. Justifier que dans le cas du béton, le dioxyde du carbone dissous en surface se trouve bien sous la forme de carbonate.
- j. A l'aide des données, montrer alors que la carbonatation du béton est thermodynamiquement favorisée.
- k. En faisant une hypothèse simple qu'on justifiera, exprimer l'évolution du produit de solubilité de la calcite avec la température. La calcite est-elle plus soluble à chaud ou à froid ?
- l. Donner un schéma de Lewis de l'ion carbonate. Cet ion possède-t-il un moment dipolaire permanent ? Justifier.
- m. La masse volumique de la calcite est de $2,7 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Calculer son volume formulaire (volume occupé par une unité de formule ou volume d'une molécule).

La structure cristallographique de l'hydroxyde de calcium (portlandite) peut être décrite comme un empilement de feuillets. Dans la figure suivante ne sont représentés que les atomes de calcium: ils dessinent un maillage hexagonal dans chaque feuillet. La distance entre deux atomes de calcium voisins dans un feuillet est de 0,36 nm et la distance entre deux feuillets voisins de 0,49 nm.



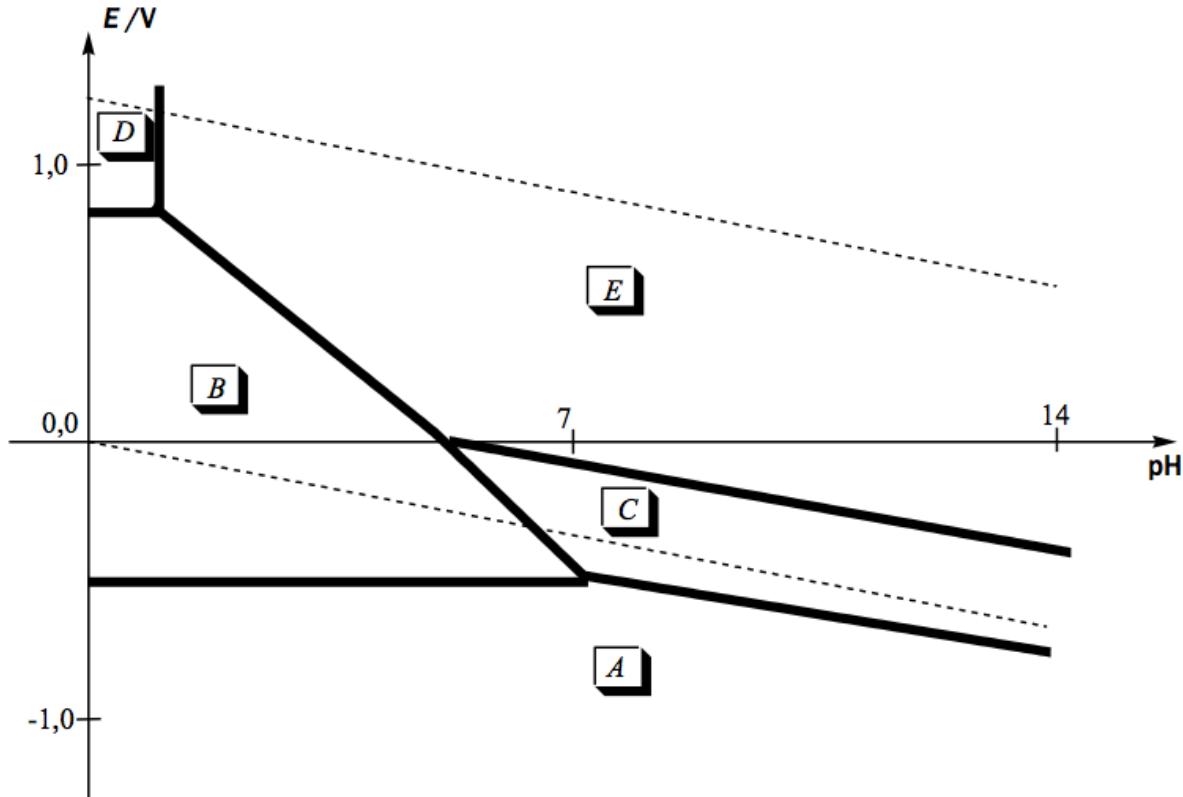
- m. Calculer le volume formulaire de la portlandite. Comment se traduit sa transformation en calcite en termes de changement de volume ?

1.4. Corrosion d'un béton armé.

Un béton armé contient des armatures internes en acier (alliage fer-carbone qui sera modélisé par le seul fer). Une éventuelle corrosion peut avoir lieu par réaction entre l'armature en fer et l'eau (ou avec le dioxygène dissous).

Le diagramme potentiel-pH du fer est donné (en traits gras), pour une concentration de tracé égale à $10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$. Il fait intervenir les espèces $\text{Fe}(s)$, Fe^{2+} , Fe^{3+} , $\text{FeOOH}(s)$ et $\text{Fe}_3\text{O}_4(s)$.

Les traits pointillés correspondent au diagramme potentiel-pH de l'eau.



- n. Quels sont les degrés d'oxydation du fer dans les solides considérés ?
o. Attribuer à chaque domaine du diagramme une espèce du fer. Expliquer le raisonnement.
p. Ecrire l'équation-bilan de la réaction concernant le fer métallique en présence d'eau et en absence de dioxygène dissous, dans un milieu fortement basique.

Données pour le problème 1

Constante d'Avogadro : $N_A = 6,0 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

Constante des gaz parfaits : $R = 8,3 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$

Constante de Faraday : $F = 96500 \text{ C.mol}^{-1}$

Constante de Nernst à 298 K : $\frac{RT}{F} \ln(10) \approx 0,06 \text{ V}$

Numéros atomiques : 6 (C) ; 8 (O) ; 20 (Ca).

Masses molaires : Ca : 40 g.mol⁻¹; Fe : 55 g.mol⁻¹; Si : 28 g.mol⁻¹

Massé volumique du fer : $\rho = 8000 \text{ kg.m}^{-3}$.

Capacités thermiques molaires à pression constante $C_{p,m}$ (en J.K⁻¹.mol⁻¹) :

composé	Ca(OH) ₂ (s)	[Ca ₃ Si ₂ O ₇ , 3H ₂ O](s)	H ₂ O(laq)
$C_{p,m}$	80	340	75

Conductivités ioniques molaires Λ° (en mS.m².mol⁻¹)

Ion	H ⁺ (aq)	Cl ⁻ (aq)	HO ⁻ (aq)
Λ°	35,0	7,6	19,8

Constantes d'acidité : $pK_{a1} (\text{CO}_2, \text{H}_2\text{O} / \text{HCO}_3^-) = 6,4$; $pK_{a2} (\text{HCO}_3^- / \text{CO}_3^{2-}) = 10,4$

Produit de solubilité : $K_s(\text{CaCO}_3) = 3 \cdot 10^{-9}$, $K_s(\text{Ca}(\text{OH})_2) = 5 \cdot 10^{-6}$

Enthalpies standard de formation et entropies standard (à 298 K):

	$\Delta_f H^\circ (\text{kJ.mol}^{-1})$	$S_m^\circ (\text{J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1})$
Ca ²⁺ (aq)	- 543	- 53
CaCO ₃ (s) (calcite)	- 1207	93
CO ₃ ²⁻ (aq)	- 677	- 57

Approximations numériques : $\sqrt{2} \approx \frac{10}{7}$ et $\sqrt{3} \approx \frac{7}{4}$

Des données utiles pour la résolution du problème sont fournies à la fin de l'énoncé.

L'épuisement des ressources fossiles ainsi que l'augmentation de l'effet de serre impliquent de trouver des solutions économies en consommation de pétrole notamment dans le domaine des transports. Une voie consiste à mélanger l'essence à des biocarburants: le bioéthanol est ainsi présent à hauteur de 10% dans l'essence SP95-E10, et jusqu'à 85% dans le superethanol E85.

Les biocarburants de seconde génération sont issus de sources ligno-cellulosiques (bois, feuilles, pailles). Afin de fabriquer le biocarburant, la cellulose contenue dans ces végétaux est tout d'abord séparée de la lignine et de l'hémicellulose par cuisson acide puis par explosion à la vapeur. La cellulose, polymère de glucose, est ensuite transformée en glucose (sucre à six atomes carbone de formule brute $C_6H_{12}O_{6(s)}$) par hydrolyse enzymatique. Le glucose est enfin transformé en éthanol lors d'une étape de fermentation utilisant des levures.

1- Représenter la structure de Lewis de la molécule d'éthanol. Expliquer pourquoi l'eau et l'éthanol sont miscibles. Quelle est la conséquence sur les carburants à base de mélange d'essence et d'éthanol ?

2- Ecrire l'équation chimique (réaction (1)) de la synthèse de l'éthanol liquide à partir de la fermentation anaérobiose d'une mole de glucose ($C_6H_{12}O_{6(s)}$), seul du dioxyde de carbone est produit en même temps que l'éthanol.

3- Calculer et commenter l'enthalpie standard de cette réaction à 298 K.

On cherche à présent à mesurer la quantité de chaleur libérée lors de la combustion complète de l'éthanol dans l'air. On brûle complètement 3g d'éthanol dans une bombe calorimétrique à partir de la température $T_i=298,0$ K. A la fin de l'expérience, l'eau du calorimètre est à la température $T_f= 318,0$ K. Le volume d'eau est de 1000 mL et on négligera la capacité calorifique du calorimètre par rapport à celle du volume d'eau.

4- Ecrire l'équation bilan de la réaction (notée (2)). Pourquoi dit-on que le bioéthanol est un carburant propre alors que sa combustion produit des gaz à effet de serre ?

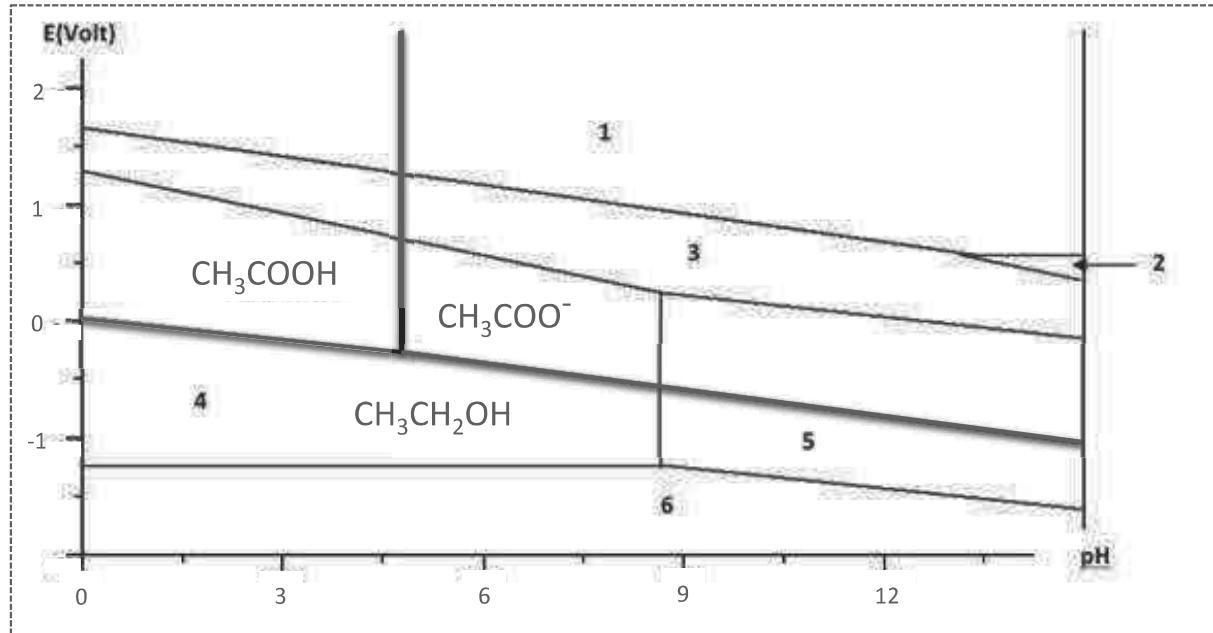
5- Calculer grâce à l'expérience de calorimétrie l'enthalpie standard molaire de la réaction de combustion de l'éthanol (liquide) à 298 K. On fera l'hypothèse que le dioxygène est introduit en quantité stoechiométrique.

6- Calculer grâce aux données fournies en annexe l'enthalpie standard molaire de la réaction de combustion de l'éthanol (liquide) à 298 K. Conclure.

Ont été superposés ci-après les diagrammes potentiel-pH du manganèse (traits fins) et de l'éthanol (traits épais).

Conventions de tracé :

- Concentration totale en espèce dissoute : $C = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.
- On considérera qu'il y a égalité des concentrations aux frontières séparant deux espèces en solution.



7- Associer aux différents domaines du diagramme potentiel-pH de l'élément manganèse les espèces solides Mn , MnO_2 et Mn(OH)_2 ainsi que les ions en solution Mn^{2+} , MnO_4^- et MnO_4^{2-} . Justifier. On précisera pour chaque espèce du manganèse son degré d'oxydation.

8- Déterminer l'équation de la frontière verticale séparant l'espèce 4 de l'espèce 5.

9- Donner (en justifiant) l'équation de la frontière verticale séparant CH_3COOH et CH_3COO^- ainsi que celle de la frontière séparant CH_3COOH et $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$.

10- En utilisant le graphique, déterminer le potentiel standard du couple $\text{MnO}_2/\text{Mn}^{2+}$.

11- En justifiant, donner la configuration électronique de l'ion Mn^{2+} .

On souhaite doser l'éthanol contenu dans un flacon étiqueté « équivalent biocarburant ». Le protocole à suivre est le suivant.

1^{ère} étape : Extraction de l'éthanol du mélange initial

Placer le biocarburant dans une ampoule à décanter, introduire 20 mL d'eau distillée, agiter et laisser décanter. Récupérer la phase aqueuse. Renouveler cette opération 2 fois. Mélanger les 3 phases aqueuses obtenues dans une fiole jaugée de 100 mL. Compléter jusqu'au trait de jauge avec de l'eau distillée ; on obtient ainsi la solution S_1 de concentration molaire C_1 en éthanol. Cette solution contient a priori tout l'éthanol provenant du biocarburant.

2^{ème} étape : Préparation de la solution à titrer

La solution S_1 étant trop concentrée, il est nécessaire de réaliser une dilution. On veut obtenir 50 mL de solution S_2 de concentration $C_2 = C_1/10$.

3^{ème} étape : Oxydation de l'éthanol

Dans un erlenmeyer, introduire : précisément $V_3 = 100$ mL de solution de permanganate de potassium de concentration $C_3 = 1,0 \cdot 10^{-2}$ mol.L⁻¹, un volume $V_2 = 2,00$ mL de S_2 prélevé à la pipette jaugée, environ 2 mL d'acide sulfurique concentré manipulé avec précaution. Boucher l'rlenmeyer puis le fixer dans un cristallisoir rempli d'eau chaude et laisser pendant 20 à 30 minutes.

4^{ème} étape : Dosage de l'excès d'ions MnO_4^- dans la solution

Doser le contenu de l'rlenmeyer par une solution contenant des ions Fe^{2+} de concentration $C_4 = 2 \cdot 10^{-1}$ mol.L⁻¹. Noter le volume V_E versé à l'équivalence. Le titrage doit être réalisé suffisamment lentement sur la fin pour dissoudre le précipité brun de MnO_2 qui se forme pendant la réaction.

12- Décrire un protocole pour l'étape de dilution en précisant la verrerie et le matériel utilisé.

13- Ecrire l'équation de la réaction qui a lieu entre l'éthanol et MnO_4^- en milieu acide.

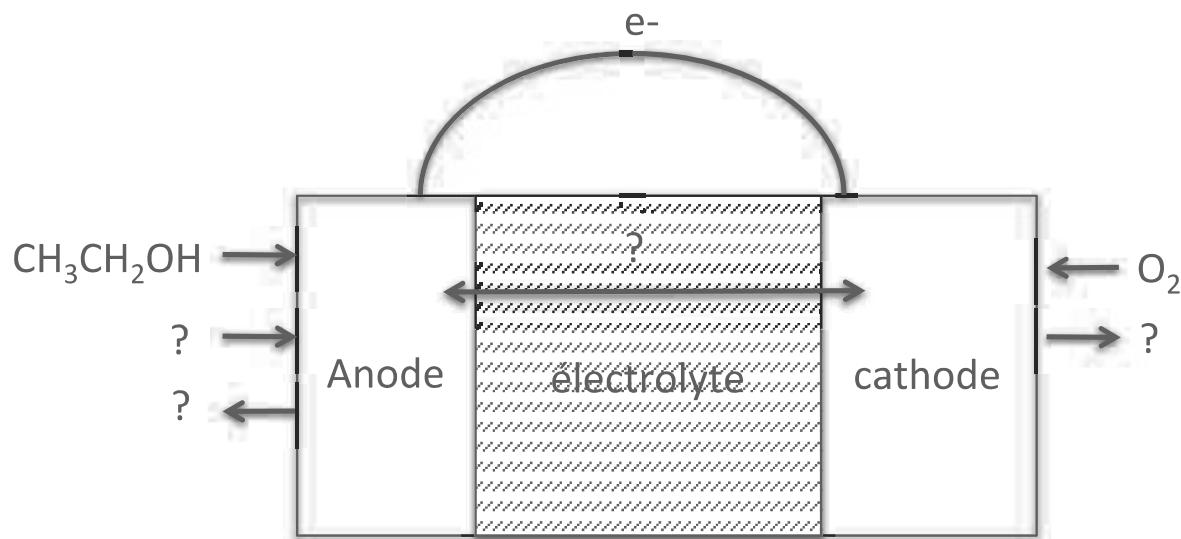
14- Ecrire l'équation de la réaction de dosage entre Fe^{2+} et MnO_4^- en milieu acide.

15- Pourquoi ne dose-t-on pas directement l'éthanol par MnO_4^- ?

16- Sachant que $V_E = 10,0$ mL, calculer la quantité d'éthanol n_2 contenue dans la solution S_2 . En déduire la concentration C_1 en éthanol de la solution S_1 .

17- A l'aide du diagramme potentiel-pH, expliquer pourquoi on doit rajouter de l'acide sulfurique concentré dans le mélange pour réaliser la 3^{ème} étape. Comment peut-on s'assurer que la réaction d'oxydation de l'éthanol par les ions permanganate est bien possible grâce à ce diagramme ?

Moins toxique que le méthanol, le bioéthanol peut être utilisé dans des piles à combustible selon le schéma suivant:



18- Sachant que l'équation bilan est la même que celle de la combustion de l'éthanol dans l'air, reproduire et compléter le schéma de la pile en renseignant les espèces chimiques manquantes et en précisant le sens des ions dans l'électrolyte et des électrons dans le circuit extérieur.

19- Commenter succinctement les avantages et inconvénients pratiques de cette pile.

20- Ecrire les demi-équations à chaque électrode.

21- Calculer la tension à vide standard de la pile. On donne $e^\circ = -\frac{\Delta_r G^\circ}{nF}$
avec n le nombre d'électrons échangés et F la constante de Faraday

Le bioéthanol peut aussi être utilisé pour produire du dihydrogène par reformage. En général, c'est le Rhodium à l'état métallique qui est utilisé comme catalyseur.

22- Situer le Rhodium dans la classification périodique (ligne et colonne).

23- Le Rhodium métallique cristallise selon la structure cubique à face centrée. Sachant que sa masse volumique est d'environ $12,4 \text{ g/cm}^3$, en déduire le rayon atomique de l'élément Rh.

Données :

Numéros atomiques : Z(Mn)=25, Z(Rh)=45

Masses molaires :

$M(Rh) = 103 \text{ g.mol}^{-1}$, $M(C) = 12 \text{ g.mol}^{-1}$; $M(O) = 16 \text{ g.mol}^{-1}$; $M(H) = 1,0 \text{ g.mol}^{-1}$

Constante d'Avogadro : $N_A = 6,0 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

Constante des gaz parfaits : $R = 8,3 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$

Constante de Faraday : $F = 96500 \text{ C.mol}^{-1}$

Constante de Nernst à 298 K :
$$\frac{RT}{F} \ln 10 = 0,06V$$

Enthalpies standard de formation, entropies standard et capacités calorifiques molaires standard (à 298 K):

	$\Delta_f H^\circ \text{ (kJ.mol}^{-1}\text{)}$	$S_m^\circ \text{ (J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}\text{)}$	$C_{Pm}^0 \text{ (J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}\text{)}$
$C_2H_5OH(g)$	-235	283	-
$C_2H_5OH(l)$	-277	161	112
$O_2(g)$	0	205	29
$N_2(g)$	-	-	29
$CO_2(g)$	-394	214	37
$H_2O(g)$	-242	189	34
$H_2O(l)$	-286	70	75

Enthalpie standard de combustion du glucose :



$pK_S(Mn(OH)_2) = 12,7$ à $25^\circ C$

Constante d'équilibre de la réaction d'autoprotolyse de l'eau à $25^\circ C$: $K_e = 10^{-14}$

$pK_a(CH_3COOH/CH_3COO^-) = 4,8$ à $25^\circ C$

Potentiels redox standards à $pH = 0$ et à $25^\circ C$:

$E^\circ(CH_3COOH/CH_3CH_2OH) = 0,037 \text{ V}$

$E^\circ(O_2/H_2O) = 1,23 \text{ V}$

3. Étude d'un transducteur électrodynamique

La figure 1 représente un plan de coupe d'un haut-parleur passant par son axe de symétrie de révolution noté $x'x$.

Le haut parleur comporte une bobine mobile comprenant N spires parcourues par un courant d'intensité $i(t)$ non représenté sur la figure 1, susceptible de se translater le long de l'axe $x'x$. Elle est reliée à une membrane, à symétrie de révolution autour de $x'x$, partant du cache noyau jusqu'à la suspension externe, qu'elle entraîne dans son mouvement.

Un chassis rigide, le saladier, maintient l'équipage mobile (bobine, membrane et cache noyau) par l'intermédiaire du spider (en matériau souple) et de la suspension externe qui assurent un mouvement de cet équipage centré sur l'axe $x'x$.

La bobine est insérée dans l'entrefer d'un circuit magnétique (en matériau ferromagnétique de haute perméabilité parfois nommé culasse du haut-parleur), comportant un aimant permanent en forme de tore qui permet de générer un champ magnétique dans l'entrefer.

La présence du champ magnétique et de la bobine permet de réaliser un actionneur électromagnétique et d'obtenir dans certaines conditions un mouvement d'oscillations de l'équipage mobile autour de sa position d'équilibre, ce qui, grâce à la présence de la membrane, génère une onde acoustique.

Les vecteurs seront notés avec une flèche (\vec{B}), sauf s'ils sont unitaires et seront alors affublés d'un chapeau ($\|\hat{u}_x\| = 1$). Les nombres complexes seront soulignés ($\underline{z} \in \mathbb{C}$) à l'exception de j tel que $j^2 = -1$. Une quantité surmontée d'un point indique la dérivé par rapport au temps de cette quantité ($\dot{x} = \frac{dx}{dt}$). Les trois parties de ce sujet sont largement indépendantes. Les données utiles à certaines applications numériques et un formulaire sont rassemblés en fin d'énoncé.

I. — Calcul du champ magnétique dans l'entrefer

□ 1 — Rappeler, pour un milieu quelconque, la relation vérifiée par le champ magnétique \vec{B} , le vecteur excitation magnétique \vec{H} et le vecteur aimantation \vec{M} en un point P de ce milieu. Donner l'unité de chacun de ces vecteurs.

□ 2 — Le matériau ferromagnétique dans lequel l'aimant permanent a été inséré est un matériau doux de très haute perméabilité. Qu'appelle-t-on milieu magnétique linéaire ? Définir la perméabilité relative μ_r d'un milieu linéaire. Quelle est son unité ? Que peut-on dire de l'excitation magnétique dans un modèle où μ_r est infinie ?

Dans toute la suite, on supposera que la perméabilité relative μ_r du matériau ferromagnétique du circuit magnétique est infinie et l'air sera assimilé à un matériau de perméabilité magnétique relative égale à 1.

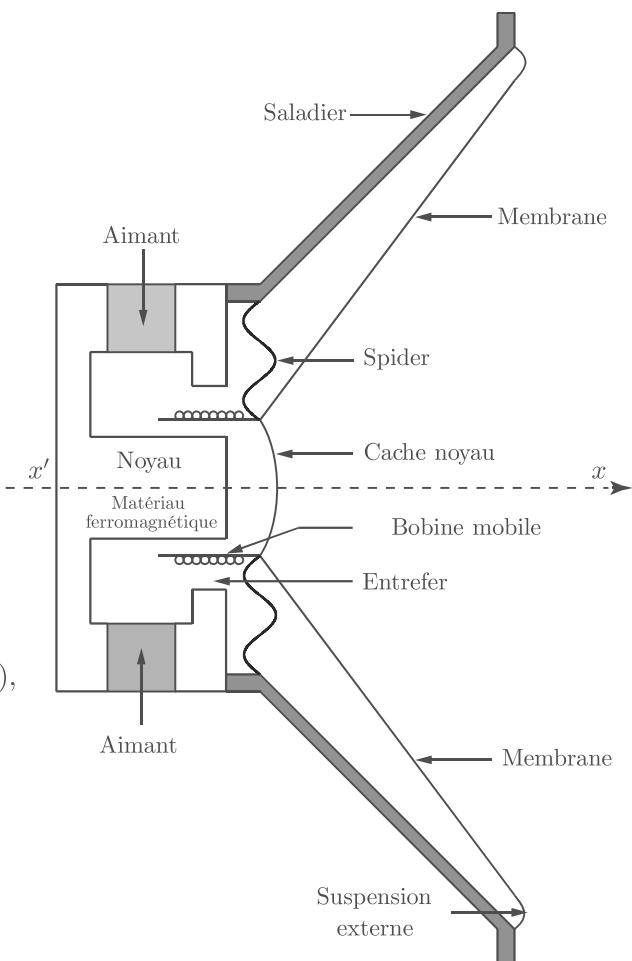


FIGURE 1 — Schéma du haut-parleur électrodynamique

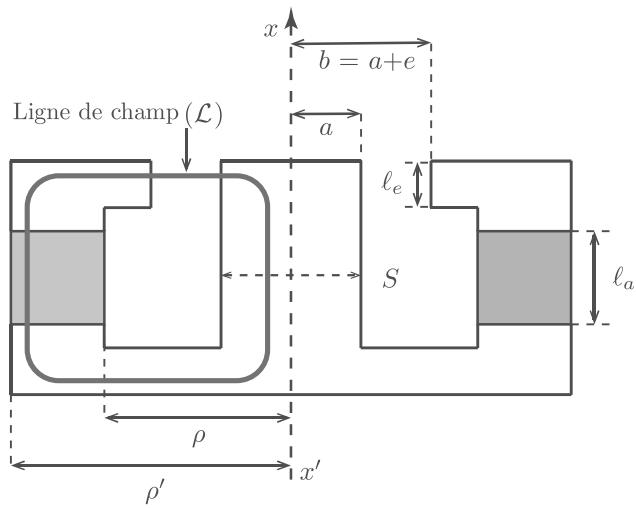


FIGURE 2 – Circuit magnétique

L'aimant permanent utilisé dans le circuit magnétique du haut-parleur est un matériau ferromagnétique dur. L'intensité M_a de son aimantation varie en fonction de l'intensité H_a de l'excitation magnétique à laquelle il est soumis. Cette variation suit le cycle idéalisé représenté sur la figure 3.

❑ 3 — Comment se nomment H_1 et M_1 ? Les trois vecteurs \vec{B}_a , \vec{H}_a et \vec{M}_a étant parallèles, tracer le cycle $B_a(H_a)$ correspondant. Quelles sont les valeurs du champ magnétique B_a possibles lorsque $H_a = 0$? Comment se nomment-elles? Expliquer comment est décrit ce cycle selon les variations de H_a . Peut-on définir une perméabilité magnétique relative pour ce matériau? Donner la relation satisfaite par H_a et B_a lorsque $M_a = -M_1$, on l'appellera relation 1.

On suppose dans un premier temps que la bobine n'est parcourue par aucun courant. La résolution numérique des équations issues de l'étude de l'association du circuit magnétique et de l'aimant permanent permet de tracer les lignes de champ (Fig. 4) dans un plan de coupe passant par l'axe $x'x$.

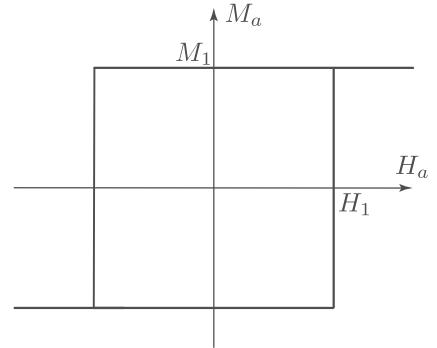


FIGURE 3 – Cycle $M_a(H_a)$

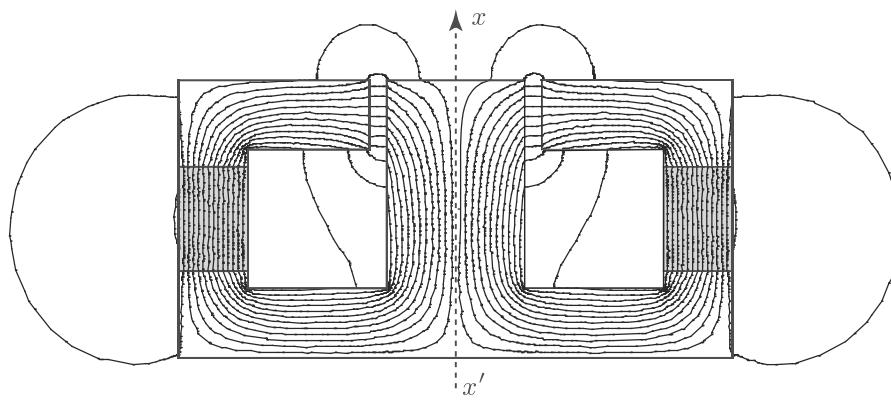


FIGURE 4 – Tracé des lignes de champ du champ magnétique obtenues par résolution numérique

L'aimantation est uniforme et vaut $\vec{M} = -M_1 \hat{u}_x$ en fonctionnement nominal. Un point P de l'entrefer est repéré par la base de coordonnées cylindriques $(\hat{u}_r, \hat{u}_\theta, \hat{u}_x)$ autour de l'axe $x'x$.

❑ 4 — Comment se comportent les lignes de champ à l'interface du matériau ferromagnétique constituant le circuit magnétique et l'air? Montrer que ce comportement est compatible avec les conditions de passage que doivent satisfaire \vec{H} et \vec{B} en tous points de la surface séparant l'air et le matériau ferromagnétique.

On définit les dimensions suivantes représentées sur la figure 2 :

- ℓ_a : longueur de l'aimant selon $x'x$;
- S_a : section droite de l'aimant orthogonale à $x'x$ avec $S_a = \pi(\rho'^2 - \rho^2)$;
- e : épaisseur de l'entrefer compris entre les rayons a et $b = a + e$;
- ℓ_e : hauteur de l'entrefer selon $x'x$.

Le rayon de la bobine est noté R_b .

On supposera que $e \ll a$, $e \ll b$ et $e \ll R_b$.

On notera que la figure 2, volontairement dilatée dans un souci de clarté, n'est pas à l'échelle et donc ne respecte pas ces ordres de grandeur.

Soit ϕ_0 , le flux algébrique orienté par \hat{u}_x traversant une section droite $S = \pi a^2$ du noyau située en dessous de l'entrefer (figure 2). Par ailleurs, le champ magnétique dans l'air de l'entrefer au niveau de la bobine est noté $\vec{B}_e = B_e \hat{u}_r$ et celui dans l'aimant, uniforme, est noté $\vec{B}_a = B_a \hat{u}_x$.

□ 5 — En analysant les lignes de champ représentées en figure 4, justifier que l'on peut considérer que ce flux se conserve dans le circuit magnétique. Établir une relation entre ϕ_0 et B_a puis entre ϕ_0 et B_e . En déduire la relation, notée (2), entre B_a , B_e et des paramètres géométriques du problème.

On considère la ligne de champ magnétique (\mathcal{L}) représentée en figure 2. Au vue de la faible épaisseur de l'entrefer, on considérera que la composante radiale du champ magnétique s'écarte très peu de la valeur B_e . On note $\vec{H}_a = H_a \hat{u}_x$, l'excitation magnétique uniforme dans l'aimant et $\vec{H}_e = H_e \hat{u}_r$ celle dans l'entrefer.

□ 6 — En appliquant le théorème d'Ampère au contour formé par la ligne (\mathcal{L}), établir la relation, nommée (3), entre H_a , H_e et des paramètres géométriques du problème.

□ 7 — À l'aide des relations (1), (2) et (3) exprimer B_a en fonction de M_1 et des paramètres géométriques. Calculer le valeur numérique de B_a . On donne $16\pi \simeq 50$.

□ 8 — Établir de même l'expression du champ magnétique B_e dans l'entrefer puis calculer sa valeur numérique.

□ 9 — Quelle condition doit satisfaire la valeur de H_1 pour que l'aimant puisse atteindre son point de fonctionnement nominal ?

□ 10 — Sachant que la bobine comporte $N = 50$ spires et que l'intensité du courant $i(t)$ ne dépasse pas 1 A, proposer une argumentation concise permettant de conclure que la valeur du champ dans l'entrefer ne fluctue pas lorsque la bobine est alimentée par un courant d'intensité $i(t)$.

FIN DE LA PARTIE I

II. — Equations mécanique et électrique dans le cadre d'un modèle linéaire

L'équipage mobile susceptible de se translater selon l'axe $x'x$ est repéré par son abscisse $x(t)$ telle que lorsque $i(t) = 0$, l'état d'équilibre mécanique correspond à la position $x = 0$. La figure 5 représente une spire circulaire de rayon R_b parmi les N enroulées sur la bobine. L'intensité algébrique $i(t)$ du courant circulant dans la spire est orientée selon \hat{u}_θ .

Lors de son mouvement, l'équipage mobile de masse m , comprenant la bobine, la membrane et le cache noyau, est soumis à une force de rappel de la part du spider, modélisée par la force $\vec{F}_r = -Kx \hat{u}_x$, où K désigne la constante de raideur positive et à une force de frottement fluide $\vec{F}_f = -h \dot{x} \hat{u}_x$, où h est une constante positive. Le champ magnétique en un point P d'une spire de la bobine s'écrit $\vec{B}_e = B_e \hat{u}_r$.

□ 11 — Rappeler l'expression la plus générale de la force électromagnétique de Laplace s'exerçant sur un conducteur filiforme de longueur ℓ parcouru par un courant d'intensité $i(t)$. En déduire l'expression de la force de Laplace \vec{F}_L s'exerçant sur la bobine. On posera $2\pi N R_b = \ell$.

□ 12 — Établir l'équation différentielle reliant $x(t)$ et $i(t)$, nommée (4), traduisant la loi de la résultante dynamique appliquée à l'équipage mobile projetée sur \hat{u}_x . Le poids sera supposé orthogonal à \hat{u}_x .

On désigne par e la force électromotrice totale induite dans le circuit de la bobine. On désigne par u , la tension d'alimentation de la bobine telle que le couple (u, i) soit en convention récepteur et par R , la résistance électrique du bobinage.

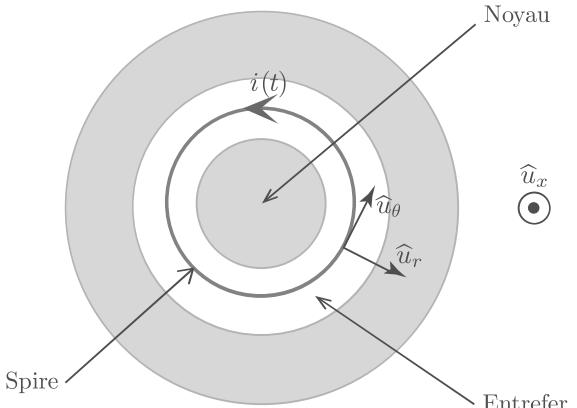


FIGURE 5 – Orientation du courant $i(t)$ dans une spire de la bobine

□ 13 — Justifier brièvement l'existence d'une force électromotrice induite dans le circuit de la bobine. On rappelle que la loi d'Ohm généralisée appliquée au circuit de la bobine s'écrit, avec les conventions précédemment définies, $u = Ri - e$.

On note \mathcal{E}_{em} l'énergie électromagnétique totale stockée dans la bobine et le circuit magnétique. On néglige l'influence du courant i sur le point de fonctionnement de l'aimant permanent. On considère que la longueur de la bobine est supérieure à celle de l'entrefer et que le mouvement engendré présente une amplitude suffisamment faible pour que la bobine reste dans la configuration représentée sur la figure 1. On peut alors montrer que l'énergie électromagnétique se simplifie sous la forme $\mathcal{E}_{\text{em}} \simeq \frac{1}{2}Li^2 + \mathcal{E}_{\text{em}_0}$, où L désigne l'inductance propre de la bobine indépendante de x et $\mathcal{E}_{\text{em}_0}$ est une énergie constante.

□ 14 — Pour une évolution élémentaire du système constitué par le haut-parleur entre t et $t + dt$, on note $\delta W_{\text{em}} = -eidt$, l'opposé du travail de la force électromotrice d'induction, $\delta W_L = F_L \dot{x} dt$, le travail de la force de Laplace et $d\mathcal{E}_{\text{em}}$ la variation d'énergie électromagnétique. En supposant que la température du système reste constante, proposer un bilan d'énergie permettant d'établir la relation $\delta W_{\text{em}} = \delta W_L + d\mathcal{E}_{\text{em}}$, nommée relation (5).

□ 15 — En déduire l'expression de la force électromotrice d'induction. Déterminer alors l'équation électrique, nommée (6), traduisant la loi d'Ohm généralisée appliquée au circuit et reliant i , u , \dot{x} , R , L , ℓ et B_e . On se place désormais en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω . On note \underline{x} , la représentation complexe de $x(t)$, \underline{u} , celle de $u(t)$ et \underline{i} , celle de $i(t)$. Traduire les deux équations (4) et (6) en représentation complexe en utilisant les seules variables \underline{u} , \underline{i} , \underline{x} et les paramètres ω , ℓ , L , R , h , K , m et B_e . On notera (4') et (6') les deux nouvelles équations en représentation complexe.

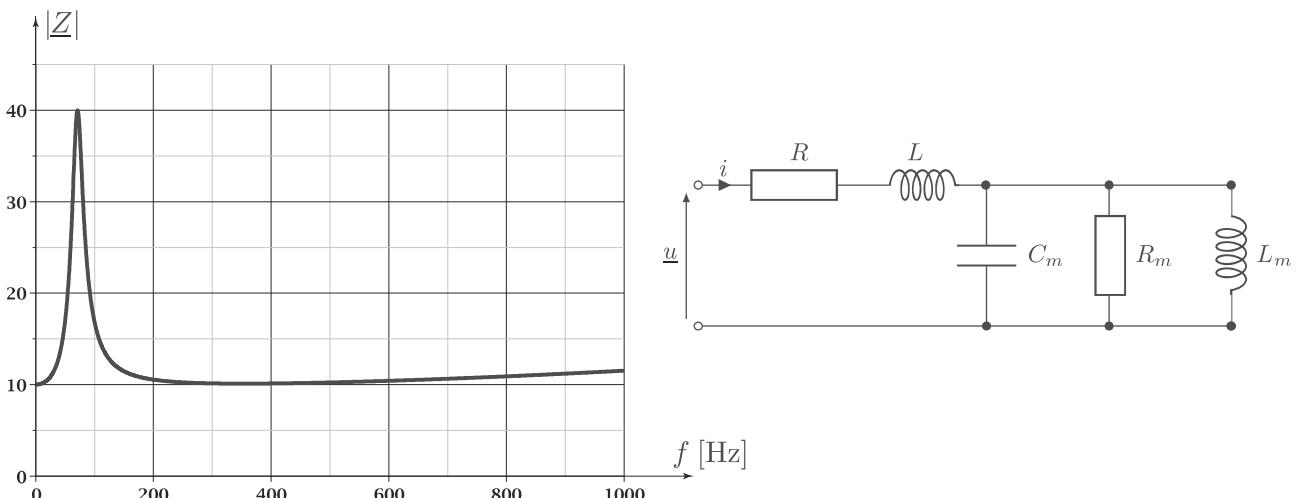


FIGURE 6 – Schéma électrique équivalent (à droite) et réponse en fréquence (à gauche)

À partir de (4') et (6'), il est possible de calculer l'impédance apparente de la bobine $\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}$ qui se met sous la forme $\underline{Z} = R + jL\omega + \underline{Z}_m$, où \underline{Z}_m se nomme l'impédance motionnelle du haut-parleur. On peut alors montrer que le schéma électrique du haut-parleur est celui représenté en figure 6. Le calcul conduit aux expressions :

$$R_m = \frac{B_e^2 \ell^2}{h}, \quad L_m = \frac{B_e^2 \ell^2}{K} \quad \text{et} \quad C_m = \frac{m}{B_e^2 \ell^2}.$$

La courbe des variations de $|\underline{Z}|$ en fonction de la fréquence est également représentée en figure 6. Pour le haut-parleur considéré $R = 10,4 \Omega$ et $L = 1,0 \text{ mH}$.

□ 16 — En justifiant les approximations effectuées, déterminer par le calcul la valeur de la fréquence f_0 pour laquelle $|\underline{Z}|$ est maximale. On donne $\sqrt{2 \cdot 10^5} \simeq 450$.

Le haut-parleur est utilisé dans la bande de fréquences où son impédance reste voisine de l'impédance minimale.

Données numériques et formulaire

$$\begin{array}{lll}
\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1} & R_b = 2 \text{ cm} & e = 3 \text{ mm} \\
\ell_e = 6 \text{ mm} & \ell_a = 2 \text{ cm} & M_1 = 4 \times 10^5 \text{ SI} \\
m = 58 \text{ g} & K = 11,6 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} & h = 7,0 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s} \\
\rho' = 6 \text{ cm} & 16\pi \simeq 50 & \rho = 3 \text{ cm}
\end{array}$$

Laplacien d'un champ scalaire radial $U = U(r)$ en coordonnées sphériques :

$$\Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rU)}{\partial r^2}$$

Gradient d'un champ scalaire radial $V = V(r)$ en coordonnées sphériques :

$$\vec{\text{grad}}(V) = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{u}_r$$